גאומטריה אלגברית - 8

<u>גבעול</u> מתורת הפונקציות המרוכבות אנו יודעים מושג של גבעול הפונקציה האנליטית: גבעול בנקודה z הוא זוג (U,f) כאשר U קבוצה פתוחה המכילה את z ואילו f פונקציה אנליטית המוגדרת על U. שני גבעולים (U_1,f_1) ו- (U_2,f_2) נחשבים זהים אם $f_1|_{U_1\cap U_2} = f_2|_{U_1\cap U_2}$. יותר טוב לומר כי הם שווים אם קיימת קבוצה פתוחה $U_3 \subseteq U_1\cap U_2$ כך ש- $f_1|_{U_3}=f_2|_{U_3}$.

מושג של גבעול ניתן להכליל לכל קדם-אלומה.
תהי $F:\mathrm{Open}(X)^{op}\to Set$ קדם-אלומה ויהי $x\in X$.
גבעול של F בנקודה x, המסומן F_x, הוא איחוד של כל הקבוצות $F(U)$, $U\ni x$, מודולו יחס שקילות המזהה את החתך $f\in F(U)$ עם צמצומו $\rho_{V,U}(f)$ לתת-קבוצה פתוחה V שגם היא מכילה את x.

יש דרך לתאר מבנה קטגורי כללי הרלוונטי פה.
<u>הגדרה</u> יהי $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ פונקטור.
גבול ישר שלו, $\mathrm{colim}\, F$, הוא אובייקט $d\in\mathcal{D}$ יחד עם אוסף מורפיזמים
$$\alpha_c: F(c)\to d$$
לכל $c\in\mathcal{C}$ המקיים שתי תכונות:

1) <u>תאום</u>: לכל מורפיזם $\varphi: c\to c'$ ב- $\mathcal{C}$ המשולש

$$\begin{tikzcd} F(c) \arrow[rr, "\alpha_c"] \arrow[dr, "F(\varphi)"'] & & d \\ & F(c') \arrow[ur, "\alpha_{c'}"'] & \end{tikzcd}$$

קומוטטיבי

2) <u>אוניברסליות</u>: לכל אובייקט $d'\in\mathcal{D}$ יחד עם מערכת מתואמת של $\alpha'_c: F(c)\to d'$ קיים ויחיד מורפיזם $u: d\to d'$ כך ש-

$$\alpha'_c = u\circ\alpha_c \quad \text{לכל } c\in\mathcal{C}$$

מושג של גבול ישר colim חשוב ביותר בתורת הקטגוריות.
במקרה הפונקטור הוא

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Set}$$

גבול ישר תמיד קיים וניתן לחשב אותו כך:

$$\operatorname{colim} F = \coprod_{c\in\mathcal{C}} F(c) /\sim$$

כאשר יחס שקילות $\sim$ נפרש ע"י

$$\forall \varphi: c\to c' \qquad F(c)\ni x \sim F(\varphi)(x)\in F(c')$$

כדי לתאר גבעול F_x כגבול ישר צריך לקחת קטגוריה של הקבוצות הפתוחות המכילות x בתור $\mathcal{C}^{op}$, ואילו $\mathcal{D} = \mathrm{Set}$.

<u>דוגמת חישוב גבול ישר</u>

הקטגוריה היא אוסף הקבוצות הפתוחות $D(f)$ המכילות $\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(A)$. במילים אחרות, הקטגוריה היא קבוצה סדורה חלקית של $D(f)$: $f\notin\mathfrak{p}$. הפונקטור שלנו נתון ע"י

$$F(D(f)) = A_f$$

בואו נבדוק כי אכן אם $D(g)\supseteq D(f)$ אז קיימת העתקה קאנונית $A_g\to A_f$, כך שבפרט אם $D(g)=D(f)$ אז $A_g=A_f$.

התנאי $D(g)\supseteq D(f)$ אומר כי $\mathfrak{p}\ni f \Leftarrow \mathfrak{p}\ni g$.
זה גורר כי $\bigcap_{\mathfrak{p}\ni f}\mathfrak{p} \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p}\ni g}\mathfrak{p}$ או, במילים אחרות,
כי $f\in \mathrm{rad}(g)$.

בפרט $f^n = bg$ עבור n מסוים. זה גורר כי $\frac{1}{g} = \frac{b}{f^n}$.

יותר פורמלי, ההומומורפיזם הטבעי $A \to A_f$ מעביר את $g \in A$ לאיבר הפיך ב־A_f, לכן הוא מגדיר הומומורפיזם קאנוני $A_g \to A_f$.

ברצוננו לחשב את הגבול הישיר

$$\operatorname{colim} F$$

כאשר
$$F : \{ D(f) \ni p \} \to \mathrm{Set}$$
הניתן על־ידי הנוסחה
$$F(D(f)) = A_f .$$

אנחנו נוכיח כי הגבול הוא A_p, הלוקליזציה של A לפי הקבוצה הכפלית $A - p$. קודם כל, ישנה מערכת של העתקות

$$A_f \longrightarrow A_p$$

שהיא מתואמת:

$$\begin{tikzcd} A_g \arrow[r] \arrow[d] & A_p \\ A_f \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

הדיאגרמה קומוטטיבית.

לכן, קיימת ויחידה ההעתקה

$$\operatorname{colim} F \longrightarrow A_p$$

המתואמת עם ההעתקות $A_f \to A_p$. נשאר להראות כי היא איזומורפיזם.

היא על כי כל איבר ב־A_p מיוצג ע״י a/f כאשר

$f\notin p$, לכן תמונה של $A_f \to A_p$. נוכיח כי הוא חח"ע.

נניח כי איבר $\frac{a}{f}\in A_f$ תמונתו 0 ב-A_p. זה אומר כי קיים איבר $g\notin p$ כך ש-$ga=0$. אבל הדיאגרמה

$$\begin{tikzcd} A_f \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rr, bend left] & \operatorname{colim} F \arrow[r] & A_p \\ A_{fg} \arrow[ur] \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

קומוטטיבית ואילו התמונה של $\frac{a}{f}$ ב-A_{fg} היא $\frac{ag}{fg}=0$, כך שהיא אפס גם ב-$\operatorname{colim} F$. זהו סוף ההוכחה.

המצב יותר פשוט במקרה A תחום שלמות. אזי כל הלוקליזציות הן תת-חוגים של שדה המנות K ואילו

$$A_p = \bigcup_{f\notin p} A_f$$

<u>האלומה המוגדרת ע"י קדם-אלומה</u>

תהי F קדם-אלומה. אנחנו מגדירים האלמה (sheafification) של F אלומה $\tilde{F}$ יחד עם העתקת קדם-אלומות

$$F \longrightarrow \tilde{F}$$

כך שהתכונה האוניברסלית הבאה מתקיימת:
את כל העתקת קדם-אלומות $F\to G$ כאשר G אלומה ניתן להציג באופן יחיד כהרכבה $F\to\tilde{F}\to G$.

כמו כל דבר המוגדר ע"י תכונה אוניברסלית,
$\tilde{F}$ יחידה אם היא קיימת. בואו נבנה אותה.

F קדם-אלומה. כמו קודם, נגדיר לכל $x\in X$ את הגבעול F_x ע"י הנוסחא

$$F_x = \operatorname{colim} F\Big|_{U\ni x}.$$

נגדיר

$$\tilde{F}(U) \subseteq \prod_{x\in U} F_x$$

ע"י התנאי:

$$\{f_x\in F_x\} \in \tilde{F}(U)$$

אם לכל $y\in U$ קיימת סביבה $y\in U'\subset U$ וקיים חתך $f\in F(U')$ כך שלכל $z\in U'$ f_z הוא תמונה של f תחת ההעתקה הקנונית $F(U')\to F_z$.

אנחנו נבדוק עתה כי:

- $\tilde{F}$ אלומה
- מוגדרת העתקה קנונית $F\to\tilde{F}$ של קדם-אלומות
- היא אוניברסלית.

נתחיל צעד צעד. יהי $U=\cup U_i$ כיסוי פתוח של U.
נתבונן בסדרה

$$\tilde{F}(U) \xrightarrow{\partial} \prod_i \tilde{F}(U_i) \underset{\partial''}{\overset{\partial'}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \tilde{F}(U_{ij})$$

כאשר $U_{ij}=U_i\cap U_j$. ברור כי ∂ העתקה חח"ע.
אם $\tilde{f}_i\in\tilde{F}(U_i)$ כאלה ש-$\partial'(\tilde{f}_i)=\partial''(\tilde{f}_i)$ אז ברור כי קיים $f\in\prod_{x\in U}F_x$
כך ש-$\partial(f)=\tilde{f}_i$. נשאר רק לוודא כי $f\in\tilde{F}(U)$.
זה תרגיל פשוט.

ההעתקה הטבעית $F \to \tilde{F}$ מתאימה ל- $f \in F(U)$
את האיבר $\{f_x\} \in \prod_{x \in U} F_x$ הבנוי מהתמונות של f
ביחס להעתקות $F(U) \to F_x$.

<u>הגדרת אלומת המבנה (structure sheaf) $\mathcal{O}_X$ עבור $X = Spec(A)$</u>

מטרתנו לבנות אלומה $\mathcal{O}_X$ על המרחב הטופולוגי $Spec(A)$
כך שהתקיים

$$\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f$$

אנחנו כבר בדקנו כי אם $D(g) \supseteq D(f)$, העתקה טבעית
$A_g \to A_f$ מוגדרת.

חישבנו גם כי $\operatorname{colim}_{D(f) \ni p} F = A_p$.

כאשר $F(D(f)) = A_f$.

עתה נגדיר $\mathcal{O}(U)$ כתת-קבוצה

$$\mathcal{O}(U) \subset \prod_{p \in U} A_p$$

על-ידי התנאי הבא המבטא למה שראינו <u>ב</u>הגדרת קדם-אלומות:
$\{x_p\} \in \prod_{p \in U} A_p$ הוא איבר ב- $\mathcal{O}(U)$ אם לכל $p \in U$

קיימת סביבה $p \in D(f) \subset U$ ואיבר $x \in A_f$ כך שלכל
$q \in D(f)$ x_q הוא התמונה של x ביחס להומומורפיזם $A_f \to A_q$.

<u>טענה</u> 1. $\mathcal{O}_X$ אלומה של חוגים קומוטטיביים.
2. $A_f \to \mathcal{O}_X(D(f))$ הוא איזומורפיזם.

הוכחת המשפט

1. זה פשוט: ההתאמה $U \mapsto \prod_{p\in U} A_p$ היא אלומה כי חתך מעל U מוגדר באופן יחיד על-ידי צירוף ערכים בכל נקודה.

כדי לבדוק כי Θ אלומה יש לוודא כי העתקת הצמצום $\prod_{p\in U} A_p \to \prod_{p\in V} A_p$ עבור $V \subset U$ מעבירה איברי $\Theta(U)$ לאיברי $\Theta(V)$. כמו כן יש לבדוק כי אם $U=\cup U_i$ ואם איבר של $\prod_{p\in U} A_p$ מגיע אחרי כל צמצום $U_i \subset U$ איבר ב-$\Theta(U_i)$ אז הוא שייך ל-$\Theta(U)$. כל הטענות האלה נובעות מיד מהגדרות.

2. עלינו לבדוק כי הומו' קאנוני $A_f \to \Theta(D(f))$ המוגדר על-ידי הומו' $A_f \to \prod_{p\in D(f)} A_p$, הוא איזומורפיזם.

קודם כל, אנחנו יכולים להחליף את החוג A_f ב-A כי $(A_f)_p = A_p$. לכן, מניחים מעתה כי $f=1$.

א. הומו' $A \to \prod A_p$ חח"ע.

ואמנם, גרעין שלו הוא חיתוך הגרעינים $Ker(A\to A_p)$. $a\in Ker(A\to A_p)$ אם ורק אם קיים $x\notin p$: $0=ax$.

יהי $I=Ann(a)$, ז.א. אוסף איברים המאפסים את a.

אם $I\neq A$, קיים אידיאל מקסימלי m המכיל את I. הוא ראשוני (כי הוא תמונה נגדית של אידיאל מקסימלי תחת הומו' $A\to A/I$). זה מוכיח כי $a\notin Ker(A\to A_m)$.

ב. הומו' $A\to \Theta(D(1))$ הוא על [$D(1)=Spec(A)$]

החתך ב-$\Theta(Spec(A))$ בנוי מאוסף $x_p \in A_p$ המתואמים במשמעות הבאה: לכל $p\in Spec(A)$ קיים $f\in A$ וגם $x_f\in A_f$ כך שכל האיברים x_q, $q\in D(f)$ הם תמונות של x_f תחת הומו' קאנוני $A_f \to A_q$.

הקבוצות הפתוחות $D(f)$ מכסות את כל הספקטרום;
היא קוואזי-קומפקטי. לכן, קיימים:

— איברים $f_1,\dots,f_n$ כך ש- $Spec(A)=\cup D(f_i)$

— איברים $x_i\in A_{f_i}$ כך שלכל $p\in D(f_i)$ האיבר x_p הוא תמונה של x_i תחת הומומ' $A_{f_i}\to A_p$.

בואו נבדוק כי האיברים x_i ו- x_j מתאימים, כ.ל.ס. מגדירים אותו איבר ב- $A_{f_if_j}$. אם $\bar{x}_i$ ו- $\bar{x}_j$ תמונות של x_i, x_j ב- $A_{f_if_j}$, תמונותיהם בכל לוקליזציה A_p, $p\in D(f_if_j)$ שווה ל- x_p. לכן, לפי סעיף (א), $\bar{x}_i=\bar{x}_j$.

ועתה נצמצם לבעיה הבאה: $Spec(A)=\cup D(f_i)$, $x_i\in A_{f_i}$ "מתאימים בחיתוכים": x_i ו- x_j מגדירים אותו איבר ב- $A_{f_if_j}$. אז קיים איבר $x\in A$ שתמונתו ב- A_{f_i} היא x_i.

קודם, $Spec(A)=\cup D(f_i)$ גורר כי $(f_1,\dots,f_n)=1$: אחרת היה קיים אידיאל מכסימאלי המכיל את $(f_1,\dots,f_n)$, והוא לא שייך לאף $D(f_i)$. לכן, קיימים $a_1,\dots,a_n\in A$: $1=\sum a_if_i$.

נכתוב $x_i=g_i/f_i^{n_i}$. כדי לפשט את הנוסחאות, נסמן $f_i^{n_i}$ ב- f_i. זה אפשרי כי $D(f_i)=D(f_i^{n_i})$. לכן, $x_i=g_i/f_i$.

התנאי האומר כי x_i ו- x_j מגדירים אותו איבר ה- $A_{f_if_j}$: $(f_if_j)^K(g_if_j-f_ig_j)=0$. נבחר K מכסימאלי לפי כל הזוגות (i,j).

נכפיל f_i ו- g_i באותו איבר f_i^K (לכל i). השוויונות $x_i=g_i/f_i$ ישמרו, אך נוסחת התאום בין x_i ל- x_j תתחלף בנוסחה פשוטה יותר

$$g_if_j=f_ig_j \qquad \forall i,j$$

עתק

$$g_i = \sum_{j=1}^{n} a_j f_j g_i = \sum_{j=1}^{n} a_j g_j f_i$$

כך שהאיבר $x = \sum a_j g_j$ ב A מיצג את השבר g_i/f_i.

סוף ההוכחה.