גאומטריה אלגברית - 7

אלומות. מרחבים מחוגים.

אם p, q מספרים ראשוניים שונים, הלוקליזציות $\mathbb{Z}_{(p)}$ ו- $\mathbb{Z}_{(q)}$ בעלות ספקטרה הומאומורפיים: $Spec(\mathbb{Z}_{(p)})$ הוא בעל שתי נקודות, האחת (p) נקודה סגורה ואילו השניה (0) נקודה שסגור שלה כל הספקטרום. לכן, כשמסתכלים על הספקטרום כעל מרחב טופולוגי, לא מבדילים בין מספרים ראשוניים שונים.

נזכיר כי איברי החוג A אנו מפרשים כפונקציות על $Spec(A)$. אם $f \in A$, איברי הלוקליזציה A_f ניתן לפרש כפונקציות על קבוצה פתוחה $D(f)=Spec(A_f)$. עם מאמץ מסוים נוכל להגדיר מה הוא אוסף פונקציות על כל קבוצה פתוחה $U \subseteq Spec(A)$. מבנה מסובך כזה מתואר ע"י מושג של אלומה (sheaf). מושג זה חשוב מאוד אך לא פשוט. אנחנו נתקדם אליו בצעדים קטנים.

1. דוגמא. יהי X מרחב טופולוגי. לכל קבוצה פתוחה U נגדיר $C(U)$ אוסף הפונקציות הרציפות $f: U \to \mathbb{R}$. הפעולה הבסיסית ביותר היא צמצום: לכל זוג קבוצות פתוחות $U_1 \subset U_2$ מוגדרת העתקה

$$C(U_2) \to C(U_1)$$

המעבירה את הפונקציה $f: U_2 \to \mathbb{R}$ לצמצומה $f|_{U_1}$.
ההגדרה הבאה מתאפת את התכונות המופשטות של פעולת הצמצום:

2. הגדרה קדם-אלומה (של קבוצות) F על מרחב טופולוגי X היא התאמה $U \mapsto F(U) \in Set$ לכל קבוצה פתוחה U ב- X, יחד עם העתקות צמצום

$$\rho_{U_1, U_2} : F(U_2) \to F(U_1)$$

הניתנות לכל זוג קבוצות פתוחות $U_1 \subset U_2$. העתקות צמצום מקיימות את התנאים

$$\rho_{U_2,U_3} \circ \rho_{U_1,U_2} = \rho_{U_1,U_3} : F(U_3) \to F(U_1)$$

לכל שלישיה של קבוצות פתוחות $U_1 \subset U_2 \subset U_3$.
וכן התנאי $\rho_{U,U} = id$.

3. דוגמאות של קדם-אלומות:

א. $F(U)=S$ קבוצה קבועה S לכל U.
זאת קדם-אלומה קבועה.

ב. $X=\mathbb{R}^n$, $U \longmapsto$ אוסף פונקציות חלקות על U, עם פעולת צמצום רגילה.

ג. $X=\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_{(p)})$ יש בה 3 קבוצות פתוחות:

$$\varnothing \subset \{(0)\} \subset X$$

קדם-אלומה מתאימה קבוצה לכל אחת משלוש הקבוצות ושתי העתקות הקבוצות:

$$S(\varnothing) \leftarrow S(\{(0)\}) \leftarrow S(X)$$

4. ניסוח מחדש של מושג קדם-אלומה.
כל מרחב טופולוגי X מגדיר קטגוריה $\mathrm{Open}(X)$ כדלקמן:
אובייקטים של $\mathrm{Open}(X)$ הינם תת-קבוצות פתוחות של X.
מורפיזמים בין U ל-V - קבוצה ריקה אם $V \not\supseteq U$
ואיבר יחיד (שיכון של U אל V) אם $V \supseteq U$.

קדם-אלומה על X היא פונקטור

$$F: \mathrm{Open}(X)^{op} \longrightarrow \mathcal{S}et$$

מהקטגוריה הדואלית ל-$\mathrm{Open}(X)$ לקטגורית הקבוצות.

> אם $\mathcal{C}$ קטגוריה, אז הקטגוריה הדואלית $\mathcal{C}^{op}$ היא הקטגוריה עם אותם אובייקטים:
>
> $$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{op} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$$
>
> אך עם המורפיזמים ההולכים בכיוון הנגדי:
>
> $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(x,y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,x)$$

6. אם כל $F(U)$ היא קבוצה עם מבנה נוסף כמו חבורה, חבורה אבלית, חוג, וכו' ... ואם העתקת

צמצום שומרות על מבנה זה (ז.א., ההומומורפיזמים של חבורות, חוגים וכו'...) אז F נקרא קדם-אלומה של חבורות, חבורות אבליות, חוגים וכו'.

למשל התאמה $C(U)$ = פונקציות רציפות $U \to \mathbb{R}$ היא קדם אלומה של חוגים קומוטטיביים.

כנ"ל לגבי ההתאמה $C^\infty(U)$ = פונקציות חלקות...

אלומה היא קדם-אלומה שמקיימת תכונות צמצום והדבקה נאות. לפני ההגדרה הפורמלית, ניתן שוב דוגמאות.

• אם f פונקציה רציפה על קבוצה פתוחה $U=\cup U_i$, ואם $f|_{U_i}=0$, אזי $f=0$. תכונה זו לא חייבת להתקיים בקדם-אלומה כללית. זה אחד התנאים שנדרוש עבור אלומה.

• יהי $U=\cup U_i$, נגדיר $U_{ij}=U_i\cap U_j$. יהיו f_i פונקציות רציפות על U_i ונניח כי $f_i|_{U_{ij}}=f_j|_{U_{ij}}$ - הן מתואמות על החיתוכים. אזי קיימת פונקציה f על U כך ש-f_i היא צמצום של f על U_i.

שתי התכונות הנ"ל ניתן לנסח כתכונה אחת: עבור $U=\cup U_i$ לכל אוסף f_i פונקציות על U_i המתואמות על החיתוכים, קיימת ויחידה פונקציה f על U.

<u>הגדרה</u> קדם-אלומה F על מרחב טופולוגי X נקראת <u>אלומה</u> אם התנאי הבא מתקיים:
לכל $U=\cup U_i$ ולכל אוסף $f_i\in F(U_i)$ כך ש-
$\rho_{U_{ij},U_i}(f_i)=\rho_{U_{ij},U_j}(f_j)$ קיים ויחיד $f\in F(U)$ כך ש:

$$\rho_{U_i,U}(f)=f_i$$

דוגמא קדם-אלומה קבועה אינה אלומה.

הערה לעתים קרובות מוסיפים לאכסיומות קדם-אלומה את התנאי $F(\emptyset)=*$ - קבוצה בת איבר אחד. אנחנו מעדיפים לזכור את זה עבור אלומות: $F(\emptyset)$ מכיל את האיבר היחיד ש"הודבק מכלום".

ניסוח נוסף של תכונת אלומה:

תהי F קדם-אלומה, $U=\cup U_i$ כיסוי פתוח.

נגדיר קבוצות והעתקות:

$$F(U) \xrightarrow{\partial} \prod_i F(U_i) \overset{\partial'}{\underset{\partial''}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} F(U_i\cap U_j)$$

ההעתקה ∂ בנויה מהצמצומים $\rho_{U_i,U}: F(U)\to F(U_i)$

ההעתקה ∂' בנויה מהרכיבים

$$\partial'_{ij}: \prod_i F(U_i) \to F(U_i\cap U_j)$$

הניתנת ע"י הנוסחא

$$\partial'_{ij}(\{f_i\}) = \rho_{U_{ij},U_i}(f_i)$$

בדרך דומה, ∂'' מוגדרת ע"י הנוסחא

$$\partial''_{ij}(\{f_i\}) = \rho_{U_{ij},U_j}(f_j)$$

אכסיומות של קדם-אלומה מבטיחות כי $\partial''\circ\partial=\partial'\circ\partial$

עתה האכסיומה של אלומה דורשת: ∂ משרה איזומורפיזם בין $F(U)$ לבין אוסף איברים ב- $\prod_i F(U_i)$ שתמונותיהם דרך ∂' ו-∂'' זהות.