הרצאה 6: מסקנות ממשפט האפסים

תהי A אלגברה נוצרת סופית מעל שדה או מעל $\mathbb{Z}$.

טענה 1 התאמה

$$V \mapsto V \cap Spm(A)$$
$$W \longmapsto \overline{W}$$

היא התאמה חח"ע בין הקבוצות הסגורות האי-פריקות ב- $Spec(A)$ וב- $Spm(A)$.

הוכחה אם $V=V(\mathfrak{p})$ קבוצה סגורה אי-פריקה, $V\cap Spm(A)$ קבוצת האידיאלים המכס' מוכלים ב' $Spec(A/\mathfrak{p})$. כיון ש $A/\mathfrak{p}$ גם כן אלגברה נוצרת סופית, קבוצת האידיאלים המכסימליים $Spm(A/\mathfrak{p})$ צפופה בה, רק ש- $\overline{V\cap Spm(A)} = V$.

אם W קבוצה סגורה אי-פריקה ב- $Spm(A)$, $\overline{W}$ אי-פריקה ב- $Spec(A)$ (תרגיל בהסקה פורמלית)

~~אזי $\overline{W}=\overline{W'}$ $\cap$ $Spm(A) \subseteq W$, כיון ש $W=W'$ וגם שתיהן W,W' צפופות~~

כיון שקבוצות סגורות ב- $Spm(A)$ לפי הגדרה מקיימות את התכונה $W=Spm\cap\overline{W}$, זה מסיים את ההוכחה.

נסכם כי קבוצות סגורות אי-פריקות ב- $Spec(A)$ מתאימות לנקודות של $Spec(A)$. לכן, אנו יכולים לשחזר את המרחב הטופולוגי $Spec(A)$ כדלקמן:

- נקודות של $Spec(A)$ מתאימות לקבוצות סגורות אי-פריקות ב- $Spm(A)$.
- תת-קבוצה ב- $Spec(A)$ סגורה אם היא אוסף תת-קבוצות אי-פריקות בקבוצה סגורה ב- $Spm(A)$ כל שהי.

<u>טענה 2</u> A אלגברה נוצרת סופית מעל שדה K. אזי
$A/\mathfrak{m}$ הרחבה סופית של K

<u>טענה 3</u> אם, בנוסף, K שדה סגור אלגברית, אז $A/\mathfrak{m} = K$.

<u>טענה 4</u> נניח $A=K[x_1,\dots,x_n]/I$, K סגור אלגברית.

אידיאלים מכסימליים של A מתאימים ל $(a_1,\dots,a_n)\in K^n$
שהם שורשים משותפים של כל הפולינומים $f\in I$.
נקרא ונסמן את הקבוצה הזאת $V(I)$.

<u>משפט</u> אוסף הפולינומים המתאפסים בקבוצה $V(I)$ (ב-K^n)
היא $\mathrm{rad}(I)$, נילרדיקל של I

<u>הוכחה</u> אוסף פולינומים המתאפסים ב- $V(I)$ הוא
חיתוך של אידיאלים מכסימליים ב- $K[x_1,\dots,x_n]/I$.
לפי משפט הקודם, הוא זהה לנילרדיקל של החוג -
שהוא אוסף ~~פולינ~~ איברים $f+I$, כאשר $f\in\mathrm{rad}(I)$.

~~הערה. תאור של $\mathrm{Spec}(A)$ עבור $A=K[x_1,\dots,x_n]$~~
~~במקרה של K שדה סגור אלגברית ניתן להכליל לכל שדה~~

<u>תכונות גיאומטריות של הומומורפיזמים של חוגים</u>

<u>משפט</u> יהי $f:A\to B$ הומו' סופי, ז.א. זה שהופך
את B ב-A-מודול נוצר סופית. אזי ~~ההעתקה~~
ההעתקה $f^a:\mathrm{Spec}(B)\to\mathrm{Spec}(A)$
היא העתקה סגורה.

<u>הוכחה</u> עלינו לבדוק כי תמונה של כל קבוצה סגורה
ב- $\mathrm{Spec}(B)$ היא סגורה ב- $\mathrm{Spec}(A)$. כיון שקבוצה
סגורה ב- $\mathrm{Spec}(B)$ היא $V(I)$ שהיא תמונה של
$\mathrm{Spec}(B/I)\to\mathrm{Spec}(B)$

ו- B/I עדיין נוצר סופית מעל A, הדבר היחיד שעלינו להוכיח הוא כי התמונה של f^a קבוצה סגורה.

יהי $I=Ker(f)$. אנחנו נוכיח כי $V(I)$ היא התמונה של f^a. נחליף A ב- A/I. עלינו להוכיח כי אם $f:A\to B$ חח"ע וסופי, אז f^a על.

במלים אחרות, יש להוכיח כי אם $\mathfrak{p}\in Spec(A)$, קיים אידיאל ראשוני $\mathfrak{q}\subset B$ כך ש $\mathfrak{p}=A\cap\mathfrak{q}$.

אנחנו נצטרך קצת למות כדי להוכיח את זה.

הוכחה נעשית בשני שלבים.

<u>שלב 1</u> מניחים כי $\mathfrak{p}\subset A$ אידיאל מכסימלי יחיד של A.

במלים אחרות, כל האיברים ב- $x\in A-\mathfrak{p}$ הפיכים (כי כל איבר לא הפיך שייך לאידיאל מכסימלי לפי למה של צורן).

חוג בעל אידיאל מכסימלי יחיד נקרא חוג מקומי (local ring).

פה ללמה של Nakayama תפקיד מכריע בהוכחה:

<u>למה</u> (Nakayama)

יהי $(A,\mathfrak{p})$ חוג מקומי, M מודול נוצר סופית מעל A. אם $\mathfrak{p}M=M$, אזי $M=0$.

<u>הוכחה</u>

יהי $M=\sum_{i=1}^{n}Ax_i$ (ז.א. x_i פורשים את M)

כיוון ש- $M=\mathfrak{p}M$, קיימים איברים $a_{ij}\in\mathfrak{p}$:

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$$

אז

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-\delta_{ij})x_j=0 \qquad \forall i$$

כאשר $\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$.

זאת מערכת משוואות עם מקדמים ב- A. אנחנו יודעים מאלגברה ליניארית כי אם לכפול מטריצה

במטריצה הבנויה מהמשלימים האלגבריים, נקבל מטריצה סקלרית.

המסקנה:

$$\det(a_{ij}-\delta_{ij})\cdot x_i = 0$$

הדטרמיננטה שווה ל- ± 1 מודולו p $\Leftarrow$ הפיכה ב-A.

מסקנה: $M=0$ ⊠

עתה אם $A \to B$ תת"ע וסופית ואם A חוג מקומי עם אידיאל מכסימלי p, אזי $pB \neq B$ לפי Nakayama
$\Leftarrow$ קיים אידיאל מכסימלי $q \subset B$, $q \supset pB$. החיתוך $A \cap q$
מכיל את p ולא מכיל את $1 \in A$ $\Leftarrow$ $q \cap A = p$.

המקרה הכללי (p ראשוני) דורש קצת יותר ידע בלוקליזציה. נדחה את ההוכחה לעת עתה.

<u>לוקליזציה של חוגים</u>

למדנו כי לכל תחום שלמות A אפשר להתאים שדה מנות
$K = \{ a/b \mid a,b \in A,\ b \neq 0 \}$.
לוקליזציה היא הכללה של בניה זו.

<u>הגדרה</u> 1. תת-קבוצה $S \subseteq A$ סגורה כפלית אם
$x,y \in S \Rightarrow x\cdot y \in S$

2. אם $S \subseteq A$ תת-קבוצה, הסגור הכפלי $\bar{S}$ שלה
היא תת-קבוצה הקטנה ביותר המכילה את S וסגורה
כפלית.

<u>הגדרה</u> תהי S קבוצה סגורה כפלית בחוג קומוטטיבי A.
חוג מנות - לוקליזציה של A ביחס ל- S, A_S, מוגדר
כדלקמן:

1. A_S כקבוצה. זאת מנה של אוסף זוגות $A\times S$
מודולו יחס שקילות המוגדר ע"י:

$$(a,s)\sim(b,t) \iff \exists u\in S:\ u(at-bs)=0$$

<u>הערה</u>: אם A תחום שלמות ואם $0\notin S$, יחס השקילות חוזר להיות מוכר יותר כ $(a,s)\sim(b,t)\iff at=bs$.
מחלקת שקילות של (a,s) נסמן ב- a/s.

2. פעולות חיבור וכפל: כרגיל:

$$a/s + b/t = (at+bs)/st$$

$$a/s\cdot b/t = ab/st$$

<u>משפט</u>: 1. מה שהגדרנו - חוג קומוטטיבי

2. ההעתקה $a\in A \mapsto a/1\in A_S$ מגדירה הומו' של חוגים

3. ההומומורפיזם זה משרה לכל חוג B העתקה

$$\mathrm{Hom}(A_S,B)\longrightarrow \mathrm{Hom}(A,B)$$

שהיא חח"ע ותמונתה היא אוסף ההומומורפיזמים
$f: A\to B$
המקיימים את התכונה הבאה:

$$\boxed{\forall s\in S \quad f(s) \text{ is invertible}}$$

<u>הוכחה</u>: תרגיל.

<u>הערות</u> 1. ברור כי אם $0\in S$, $A_S=\{0\}$.

2. ברור כי אם לכל תת-קבוצה $S\subset A$ נגדיר
$A_S=A_{\bar S}$,
התכונה האוניברסלית של A_S תישמר.

דוגמאות של קבוצות כפליות מעניינות:

1) $S=A-p$, p ראשוני. אני נכתוב A_p במקום A_S במקרה זה.

2) $S=\{a^n | n\in\mathbb{N}\}$. אני נכתוב A_a במקום A_S במקרה זה.

<u>לוקליזציה של מודול</u>. A חוג, $S\subset A$ קבוצה כפלית, M - A-מודול. בונים מודול חדש M_S מעל החוג A_S שאיבריו זוגות m/s מודולו אותו יחס שקילות שמגדיר את A_S:

$$M_S = M\times S/\sim$$

$$(m,s)\sim(n,t) \iff \exists u\in S: u(mt-ns)=0$$

פעולות חיבור וכפל באיברי A_S מוגדרים כרגיל.

<u>למה</u> אם $f:M\to N$ חח"ע אז $f_S: M_S\to N_S$ חח"ע.
אם $f_S\left(\frac{m}{s}\right)=0$, זה אומר כי $f(m)/s=0$ ז.א. קיים $u\in S$: $u f(m)=0$. כיוון ש-f חח"ע זה גורר כי $m/s=0 \Leftarrow um=0$.

<u>למה</u> אם M נוצר סופית מעל A, M_S נוצר סופית מעל A_S.
<u>הוכחה</u> - תרגיל.

עתה אפשר להשלים את הוכחת המשפט על הומומורפיזמים סופיים: יהי $f:A\to B$ חח"ע סופי, $p\in Spec(A)$.
הלוקליזציה
$f_p: A_p\to B_p$ שוב חח"ע וסופי
(כאן B_p היא לוקליזציה של החוג B לפי $S=A-p$)

השוואת Spec(A) ו- $Spec(A_S)$.

ההומומורפיזם $f: A \to A_S$ משרה
$$f^a: Spec(A_S) \to Spec(A)$$

טענה: f^a העתקה חח"ע; תמונתה היא אוסף אידיאלים ראשוניים $\mathfrak{q}$: $S \cap \mathfrak{q} = \emptyset$. הטופולוגיה ב- $Spec(A_S)$ מושרית ע"י הטופולוגיה ב- $Spec(A)$.

הוכחה אם $\mathfrak{p} \in Spec(A_S)$ וגם $\mathfrak{q} = f^{-1}(\mathfrak{p})$, מתקיים $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cdot A_{\mathfrak{p}}$ (בדיקה מיידית). זה מוכיח את הטענה הראשונה.
עכשיו, $\mathfrak{q} \in Spec(A)$ בתמונה של f^a אם ורק אם $\mathfrak{q} = f^{-1}(\mathfrak{q}A_S)$.
אם $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$, $\mathfrak{q} \cdot A_S = (1)$. אחרת
$$\mathfrak{q} \cdot A_S = \{ a/s \mid a \in \mathfrak{q} \}$$
והתמונה הנגדית
$$f^{-1}(\mathfrak{q} \cdot A_S) = \{ a/s = b/1 \mid a \in \mathfrak{q} \}$$

נזכיר כי $a/s = b/1$ גורר $(a - bs)u = 0$ עבור $u \in S$,
וזה גורר $bsu \in \mathfrak{q}$. אם יודע כי $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$, זה גורר
כי $b \in \mathfrak{q}$, זאת אומרת, כי $f^{-1}(\mathfrak{q} \cdot A_S) = \mathfrak{q}$
כדי להוכיח כי הטופולוגיה של $Spec(A_S)$ מושרית ע"י
הטופולוגיה ב- $Spec(A)$, עלינו לוודא כי לכל קבוצה פתוחה
$U \subset Spec(A_S)$ מתקיים $U = Spec(A_S) \cap D$ עבור
קבוצה פתוחה מסוימת D ב- $Spec(A)$. או, יותר פשוט, כי
אם V סגורה ב- $Spec(A_S)$, אזי $V = Spec(A_S) \cap \overline{V}$.
נשאיר את זה כתרגיל.

השלמת הוכחת המשפט על הומומורפיזם סופי:

אם $f: A \to B$ סופי + חח"ע וגם $\mathfrak{p} \in Spec(A)$,
הומו' $f_{\mathfrak{p}}: A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{p}}$ סופי חח"ע, $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ אידיאל מקסימלי
ב- $Spec(A_{\mathfrak{p}})$ $\Leftarrow$ קיים אידיאל מקסימלי $\mathfrak{q} \in Spec(B_{\mathfrak{p}})$: $f_{\mathfrak{p}}^a(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$.
זה מגדיר נקודה ב- $Spec(B)$. ☒

כמסקנה מהדיונים הקודמים, אנו מקבלים את התאור הבא של הסיבים של העתקה

$$f^a: \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$$

המוגדרת ע"י ההומומורפיזם

$$f: A \to B$$

<u>משפט</u> יהי $p \in \mathrm{Spec}(A)$. הסיב $(f^a)^{-1}(p)$ הומאומורפי ל-

$$\mathrm{Spec}(B_p / pB_p).$$

<u>הוכחה</u> $\mathrm{Spec}(B_p)$ הוא אוסף אידיאלים ראשוניים $q \in \mathrm{Spec}(B)$: $q \cap (A \setminus p) = \emptyset$ או $f^a(q) \subseteq p$. $\mathrm{Spec}(B_p / pB_p)$ הוא הקבוצה ~~[illegible]~~ סגורה ב- $\mathrm{Spec}(B_p)$ של האידיאלים המכילים את pB_p. זה משאיר רק $q \in \mathrm{Spec}(B)$: $f^a(q) = p$. $\square$

<u>עבודת בית:</u>

1. יהי A חוג מקומי עם אידיאל מקסימלי $\mathfrak{m}$, $K = A/\mathfrak{m}$. ~~[illegible]~~ יהי M מודול נוצר סופית מעל A. הוכח כי הקבוצה $\{x_1, \dots, x_n\}$ פורשת את M אם ורק אם התמונות שלה ב- $M/\mathfrak{m}M$ פורשות את המנה כמרחב וקטורי מעל K.
2. הוכח: M נוצר סופית מעל A $\Leftarrow$ M_S נוצר סופית מעל A_S.
3. הוכח כי הטופולוגיה ב- $\mathrm{Spec}(A_S)$ מושרית ע"י הטופולוגיה ב- $\mathrm{Spec}(A)$.
4. הוכח כי התמונה של $\mathrm{Spec}(A_f) \to \mathrm{Spec}(A)$ $[f \in A]$ היא הקבוצה הפתוחה $D(f)$.
5. האם $\mathrm{Spec}(A_S)$ תמיד פתוחה ב- $\mathrm{Spec}(A)$?
6. מתי $\mathrm{Spec}(A_S)$ סגורה ב- $\mathrm{Spec}(A)$?