# גאומטריה אלגברית הרצאה 4

<u>מסקנה</u> יהי $A$ חוג Noether. מספר אידיאלים ראשוניים מינימליים סופי.

<u>מסקנה</u>: יהי $I$ אידיאל רדיקלי בחוג Noether $A$. אזי מספר אידיאלים ראשוניים המכילים את $I$ ומינימליים בין האידיאלים האלה, סופי; חיתוך שלהם שווה ל-$I$.

<u>הוכחה</u>. $A$ חוג Noether $\Leftarrow$ $A/I$ חוג Noether. האידיאלים שלנו הם אידיאלים ראשוניים מינימליים של $A/I$. החיתוך שלהם שווה ל-$0$ ב-$A/I$ כי $A/I$ לא מכיל נילפוטנטים.

## <u>הוכחת משפט Hilbert על בסיס</u>.

יהי $A$ חוג Noether, $I\subseteq A[t]$ אידיאל. נוכיח כי הוא נוצר סופית.

נגדיר לכל $n\in\mathbb{N}$ אידיאל $J_n\subseteq A$: $a\in J_n$ אם קיים ב-$I$ פולינום בעל מעלה $n$ עם המקדם הראשי $a$.

<u>$J_n$ הוא אכן אידיאל</u>: ברור.

<u>$J_n\subseteq J_{n+1}$</u> ברור כי ניתן להכפיל פולינום ב-$t$.

$A$ חוג Noether $\Leftarrow$ הסדרה של אידיאלים מתייצבת. $J=J_m$.

נבחר עתה יוצרים לכל אידיאל $J_k$, $k=0,1,\dots,n$

$$J_k=(a_{k1},\dots,a_{kl_k})$$

נבחר פולינום $f_{kl}$ ב-$I$ בעל מעלה $k$ עם המקדם הראשי $a_{kl}$.

נוכיח כי $f_{kl}$ פורשים את $I$...

נשאיר את הטענה האחרונה כתרגיל.

<u>מחלקי האפס בחוג Noether</u> $A$ חוג Noether, $f\in A$ מתאפס על אחד מרכיבי האי-פריקות של $A$ $\Leftarrow$ $f$ מחלק ה-$0$.

<u>הוכחה</u> התנאי על $f$ בשפת אלגברה אומר כי $f\in p$, $p$ אידיאל ראשוני מינימלי.

יהי $\mathrm{Spec}(A) = X\cup Y$ כאשר $X$ המרכיב: $f|_X=0$, $Y$ איחוד של המרכיבים. $Y$ קבוצה סגורה (מספר המרכיבים סופי), $X\not\subseteq Y$,

$\Leftarrow$ קיים $g\in A$: $g|_Y=0$, $g|_X\neq 0$. אז $fg=0$ על כל הספקטרום

$\Leftarrow$ $(fg)^n=0$ $\Leftarrow$ $f(f^{n-1}g^n)=0$ $\Leftarrow$ ... $\Leftarrow$ $f$ מחלק האפס.

2.

הכיוון הנגדי של המשפט לא נכון בניסוח הנוכחי.

יהי $A=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_p$ כחבורה אבלית עם הכפל הניתן ע"י הנוסחא

$$(a,x)(b,y)=(ab, ay+bx).$$

האיבר $(p,0)$ מחלק האפס ב-$A$ כי $(p,0)(0,1)=0$.
אך $\mathrm{Spec}(A)=\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ אי-פריק ואילו $(p,0)$ לא מתאפס עליו.

<u>משפט</u> אם $A$ חוג ללא איברים נילפוטנטיים ואם $f\in A$ מחלק האפס אז $f$ מתאפס על מרכיב אי-פריקות של $\mathrm{Spec}(A)$.

<u>הוכחה</u> $f\cdot g=0 \Leftarrow V(f)\cup V(g)=\mathrm{Spec}(A)$. כל מרכיב אי-פריקות של $\mathrm{Spec}(A)$ נמצא ב-$V(f)$ או ב-$V(g)$ $\Leftarrow$ קיים מרכיב הנמצא ב-$V(f)$. $\square$

## עוד תכונות טופולוגיות של $\mathrm{Spec}(A)$: קוואזי-קומפקטיות.

<u>הגדרה</u> מרחב טופולוגי $X$ נקרא קוואזי-קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח של $X$ ניתן למצוא תת-כיסוי סופי.

<u>הערה:</u> בהשוואה לקומפקטיות, אין דרישה של Hausdorff.

<u>משפט</u> $\mathrm{Spec}(A)$ קוואזי-קומפקטי.

<u>הוכחה</u>
כל קבוצה פתוחה $D(E)$ היא איחוד של $D(f)$:

$$D(E)=\bigcup_{f\in E} D(f)$$

אם $\mathrm{Spec}(A)=\bigcup_{\alpha} D(E_\alpha)$, ונציג $D(E_\alpha)=\bigcup_{f\in E_\alpha} D(f)$, נקבל הצגה

$$\mathrm{Spec}(A)=\bigcup_{\beta} D(f_\beta)$$

ואם נצליח למצוא בה תת-כיסוי סופי, זה יפתור גם את הבעיה המקורית.

עפ"י השוויון

$$\operatorname{Spec}(A)=\bigcup_\beta D(f_\beta)$$

שקול לטענה

$$\emptyset=\bigcap_\beta V(f_\beta)$$

ואילו זה אומר בפשטות כי האידיאל הנפרש ע"י $f_\beta$ הוא $A$.
אבל $A=(f_\beta)$ שקול לכך ש- $1\in(f_\beta)$ ג.ל.
קיימת הצגה

$$1=a_1f_1+\dots+a_nf_n$$

כאשר $f_1,\dots,f_n$ — תת-קבוצה סופית של איברים מבין $\{f_\beta\}$.
<u>מסקנה</u>: כבר $A=(f_1,\dots,f_n)$ או במילים אחרות

$$\operatorname{Spec}(A)=\bigcup_{i=1}^n D(f_i).$$

<u>הומומורפיזמים שלמים והומומורפיזמים סופיים.</u>

יהי $f:A\to B$ הומו' של חוגים.
$x\in B$ נקרא <u>שלם</u> מעל $A$ אם קיים פולינום $p\in A[t]$ עם מקדם ראשי $=1$ המאפס את $x$.
מושג השלמות דומה (אך לא זהה) למושג אלגבריות של איברים בהרחבת שדות.
הגדרה $A[x]$ הוא תת-חוג של $B$ הנפרש על-ידי התמונה של $A$ ועל-ידי $x$.
<u>למה</u> $A[x]$ הוא התמונה של חוג הפולינומים $A[t]$ תחת הומו' ההצבה:

$$A[t]\longrightarrow B$$
$$\sum a_it^i\longmapsto\sum f(a_i)\cdot x^i$$

<u>הוכחה</u> ברור.

<u>למה</u> $x$ שלם מעל $A$ ~~[illegible]~~ $\Leftarrow$ $A[x]$ מודול נוצר סופית מעל $A$.
<u>הוכחה</u>: האיברים $1,x,\dots,x^{d-1}$ $(d=\deg(p))$ פורשים את $A[x]$ מעל $A$.

מודולים  יהי A חוג. A-מודול הוא חבורה אבלית M יחד עם פעולה כפל באיברי A:

$$a \in A,\ m \in M \Rightarrow a \cdot m \in M$$

הפעולה צריכה לקיים את שני חוקי פילוג

$$(a+b)m = am + bm$$

וכן חוק קיבוץ $a(bm) = (ab)m$.

וגם $1 \cdot m = m$

מודולים מעל שדה הם פשוט מרחבים וקטוריים.

מודולים מעל $\mathbb{Z}$ הם פשוט חבורות אבליות

דוגמאות מודולים:

- $M = A$ חוג עצמו הוא מודול מעל עצמו.
- $M = A/I$ גם כן מודול.
- באופן יותר כללי, אם $f : A \to B$ הומומ' של חוגים, $B$ באופן אוטומטי הופך להיות מודול מעל $A$, הפעולה ניתנת על-ידי הנוסחא $a \cdot b := f(a)b$.
- $M_1, M_2$ מודולים $\Leftarrow$ $M_1 \oplus M_2$ גם כן מודול.

קבוצה $E \subset M$ נקראת קבוצה פורשת אם לכל $m$ ב-$M$ ניתן להציגו

$$m = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$$

כצירוף ליניארי (סופי) של איברי $E$ עם מקדמים בחוג.

מודול $M$ נקרא מודול נוצר סופית אם יש לו קבוצה סופית פורשת.

משפט  יהי $A$ חוג Noether, $M$ מודול נוצר סופית.
אז כל תת-מודול שלו גם כן נוצר סופית.

הוכחה  ראה בעמוד הבא.

יהי $A$ חוג כלשהו. $A$-מודול $M$ נקרא מודול של Noether אם כל תת-מודול שלו נוצר סופית.

המשפט שלעיל טוען כי אם $A$ חוג של Noether, כל מודול נוצר סופית הוא מודול של Noether.

נעיר כי כל חוג Noether הוא מודול Noether מעל עצמו.

<u>למה</u> יהי $M$ מודול Noether, $N \subseteq M$. אזי

א) $N$ גם כן מודול Noether

ב) $M/N$ גם כן מודול Noether.

<u>הוכחה</u> מודול $M$ הוא Noether אם ורק אם כל שרשרת עולה של תת-מודולים

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

מתייצבת (הוכחה כמו לחוגים).

עתה אם $\bar{M}_1 \subseteq \bar{M}_2 \subseteq \dots$ שרשרת עולה של תת-מודולים ב- $M/N$, נגדיר $M_i$ תמונה נגדית של $\bar{M}_i$ ב- $M$, ונקבל שרשרת עולה של תת-מודולים ב- $M$. אם $M$ מודול Noether $\Leftarrow$ היא מתייצבת.

<u>משפט</u> (היפוך של הלמה הקודמת) אם $M/N$, $N$ מודולי Noether אזי $M$ מודול Noether.

<u>הוכחה</u>. תהי $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ סדרה עולה. נתבונן בסדרה $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots$ הניתנת ע"י הנוסחא $N_i = M_i \cap N$. היא מתייצבת כי $N$ מודול Noether. נסמן $N_\infty = \cup N_i$, כך ש $N_\infty = N_n$ החל מ- $n$ מסוים.

נתבונן עתה בתמונות $\bar{M}_1 \subseteq \bar{M}_2 \subseteq \dots$ ב- $M/N$. הן גם כן מתייצבות, נסמן $\bar{M}_\infty = \cup \bar{M}_i$ ואפשר להניח כי $\bar{M}_\infty = \bar{M}_n$. עתה קל לבדוק כי ההומומ' $M_n \to M_{n+1}$ הוא חח"ע ועל.

עתה אנו יכולים להוכיח כי כל מודול נוצר סופית מעל חוג נתר הוא מודול Noether:

אם $M=\mathrm{Span}\{x_1,\dots,x_n\}$, נגדיר $M_i=\mathrm{Span}\{x_1,\dots,x_i\}$. אז' מודול מנה

$$M_k/M_{k-1}$$

נוצר ע"י איבר אחד ⇐ איזומורפי למנה $A/I$ ⇐ מודול Noether.
באינדוקציה מקבלים את המשפט.

<u>משפט</u> יהי $f:A\to B$ הומומ' של חוגים, $A$ חוג Noether. $B$ מודול נוצר סופית מעל $A$. אז' כל איבר $x\in B$ שלם מעל $A$.

<u>הוכחה</u>.
$A[x]$ תת-מודול של $B$ ⇐ נוצר סופית.
$A[x]$ נוצר כמודול מעל $A$ ע"י החזקות $x^0, x^1, x^2, \dots$
נגדיר

$$M_k=\mathrm{Span}\{x^0,\dots,x^k\}\subseteq A[x]$$

כל הוא תת-מודול של $A[x]$. הסדרה $M_0\subseteq M_1\subseteq\dots$
מתייצבת ⇐ קיים $n$: $x^n\in M_{n-1}$ ⇐ ☒.

<u>נורמליזציה</u> (סגור שלם)
$f:A\to B$ כמו קודם. אוסף איברי $B$ השלמים מעל $A$
נקרא סגור שלם של $A$ ב-$B$.

<u>דוגמא</u> $A$ תחום שלמות, $B$ שדה מנות ⇐ סגור שלם נקרא
גם נורמליזציה $A^{nor}$ של $A$.

<u>משפט</u> יהי $A$ חוג עם פרוק יחיד לגורמים אי-פריקים.
אז' $A^{nor}=A$.

<u>הוכחה</u> אם $x=a/b$ מקיים משוואה

$$x^n+c_1x^{n-1}+\dots+c_n=0$$

אז $a^n+c_1a^{n-1}b+\dots+c_nb^n=0$
⇐ $b|a^n$ ⇐ $b=1$ אם נניח כי $(a,b)=1$.

☒