גאומטריה אלגברית. הרצאה 3
טופולוגית Zariski (המשך)

נזכיר: $Spec(A)$ אי-פריק (irreducible, התרגום לעברית לא טוב) אם ורק אם הנילרדיקל של A הינו אידיאל ראשוני.

למה: יהי I אידיאל ב-A. אז ההומומ' הטבעי $A \to A/I$ משרה איזומ' בין $Spec(A/I)$ לבין תת-קבוצה סגורה $V(I)$ של $Spec(A)$.
הוכחה - תרגיל.

מסקנה: $V(I)$ קבוצה אי-פריקה אם ורק אם האידיאל

$$rad(I) := \{x \mid \exists n : x^n \in I\}$$

הוא ראשוני.

דרך אגב, $N = rad(0)$ - נילרדיקל שראינו קודם.

יתר על כן, במקרה זה [$V(I)$ אי-פריק] $V(I)$ הוא סגור של הנקודה ב-$Spec(A)$ המתאימה לאידיאל ראשוני $rad(I)$.
ובכן, קיבלנו התאמה חד-חד-ערכית:

$Spec(A) \longleftrightarrow$ קבוצות סגורות אי-פריקות ב-$Spec(A)$
ההתאמה מתאימה לכל נקודה $x \in Spec(A)$ את הסגור שלה $\overline{\{x\}}$.

נתבונן טוב יותר בקומבינטוריקה של קבוצות סגורות אי-פריקות.

הערה: נעיר כי מושג של קבוצות סגורות אי-פריקות הוא בעל משמעות לכל מרחב טופולוגי, אך הוא לא נותן שום דבר מעניין אם המרחב הטופולוגי הוא "יותר נורמאלי", כך שלמשל, הנקודות שלו סגורות.

קל לראות כי הקבוצה של הקבוצות האי-פריקות של מרחב טופולוגי
מקיימת למה של Zorn: אם $\{X_i\}$ שרשרת של קבוצות
אי-פריקות, $\overline{\cup X_i}$ גם קבוצה אי-פריקה.

לכן, כל קבוצה אי-פריקה מוכלת בקבוצה אי-פריקה מקסימלית.
<u>הגדרה</u> קבוצה אי-פריקה מקסימלית נקראת מרכיב אי-פריקות

ברור כי $X = \cup X_i$, X_i מרכיבי אי-פריקות:
אם $x \in X$, $\{\bar{x}\}$ קבוצה אי-פריקה $\Leftarrow$ מוכלת במרכיב.

<u>הערה:</u> מרכיבי אי-פריקות לא זרים זה לזה: ראה דוגמא.

<u>דוגמא:</u> $A = k[x,y]/(x\cdot y)$

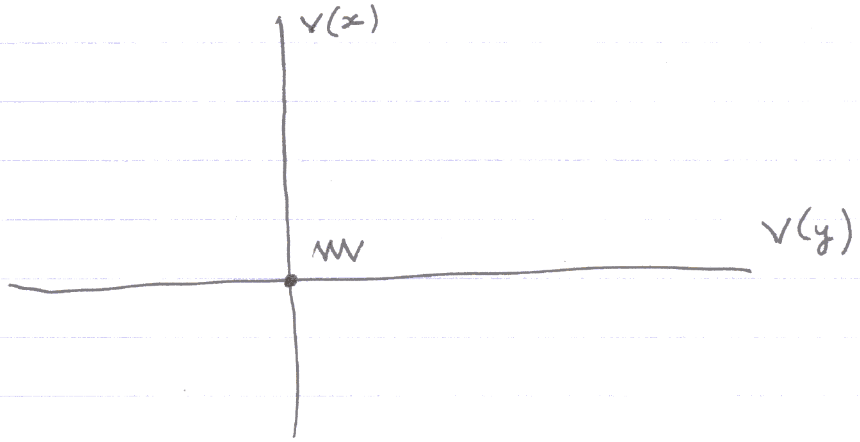
כל אידאל ראשוני של A מכיל את x או y.
אוסף אידאלים ראשוניים המכילים את x, $V(x)$, הומאומורפי
ל- $\operatorname{Spec}(A/(x)) = \operatorname{Spec} k[y]$. זאת קבוצה אי-פריקה.
גם כן $V(y)$ קבוצה אי-פריקה. לכן,

$$\operatorname{Spec}(A) = V(x) \cup V(y)$$

-פריק למרכיבי אי-פריקות. לא זרים הם:

$$V(x) \cap V(y) = \{\mathfrak{m}\}$$

כאשר $\mathfrak{m} = (x,y)$ אידאל מקסימלי! - ראה איור:



<u>הגדרה</u> $\dim(A) =$ אורך שרשרת קבוצות הסגורות האי-פריקות הארוכה ביותר: $Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_d$

<u>דוגמאות:</u> 1. $\dim(\mathbb{Z}) = 1$ השרשרת $(0) < (p)$

2. $\dim(k[t]) = 1$ השרשרת $(0) < (t)$

3. $\dim k[t_1,\dots,t_n] = n$ - הוכחה לא פשוטה.

למשפחה גדולה של חוגים מספר מרכיבים אי-פריקות סופי:

<u>הגדרה</u> A נקרא חוג Noether אם לכל אידיאל I יש מספר סופי של יוצרים:
$I = (x_1,\dots,x_n)$: $\exists x_1,\dots,x_n \in I$.

<u>הגדרה שקולה</u> A הינו חוג של Noether אם כך שרשרת עולה של אידיאלים
$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$
מתייצבת.

<u>הוכחת השקילות.</u>

אם $I = \cup I_i$, $I=(x_1,\dots,x_n)$, כל אחד מ-x_i שייך לאחד האידיאלים $I_{j(i)}$, ניקח אינדכס $N > j(i)$ ואז $I_N \ni x_i \Leftarrow I_N = I$.

בכיוון הנגדי: אם I אידיאל ~~א~~ ואם ~~האידאל~~ הוא לא נוצר סופית, יש סדרת איברי I , $x_1, x_2, \dots$ כך שהסדרה $I_i = (x_1,\dots,x_i)$ אינה מתייצבת

<u>משפט</u> הרבה חוגים הם חוגי Noether :

1. A חוג Noether ⇐ A/I חוג Noether
2. A חוג Noether ⇐ A[t] חוג Noether.

חלק 1 הוא תרגיל פשוט.
חלק 2 הוא משפט Hilbert על בסיס. הוא לא קשה אך לא נוכיח אותו בקורס [תנסו למצוא אותו ב Wiki]

<u>מסקנה</u>: כל חוג מהצורה $k[x_1,\dots,x_n]/I$ או $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]/I$
הוא חוג Noether.

<u>משפט</u> יהי A חוג Noether. אזי יש לו מספר סופי של מרכיבי אי-פריקות.

<u>הוכחה</u>.

$X=\mathrm{Spec}(A)$. $X=\bigcup X_i$ —איחוד מרכיבי אי-פריקות.

~~קודם כל אם I קבוצת מרכיבי אי-פריקות ואם~~ $\cancel{I' \subsetneq I}$
~~אז~~ $\cancel{X \neq \bigcup_{i\in I'} X_i}$ ~~כי אם~~ $\cancel{j \notin I'}$,

$$\cancel{X_j \subset X = \bigcup_{i\in I'} X_i}$$

~~היה נותן~~ $\cancel{X_j = \bigcup_{i\in I'} (X_i \cap X_j)}$

$\cancel{\Leftarrow X_j = X_i \cap X_j}$ ~~—סתירה~~

כיון ש-A חוג של Noether, כל סדרה יורדת של קבוצות סגורות ב-X מתייצבת. לכן, אם נתחיל עם X, נפרק אותו

$$X = X_1 \cup X_2$$

לקבוצות סגורות אם אפשר, ונמשיך את התהליך, הוא לא יכול להימשך עד אינסוף. לכן, קיים פרוק סופי

$$X = \bigcup_{i\in J} X_i$$

של X למרכיבי אי-פריקות. נוכיח עתה כי $J=I$.
בינתיים אנו יודעים רק כי J תת-קבוצה סופית ב-I.

יהי $i \in I-J$. אז

$$X_i \subset X = \bigcup_{j \in J} X_j$$

לכן $X_i = \bigcup_j (X_i \cap X_j)$ – איחוד סופי.

זה סותר את אי-פריקות של X_i.

<u>מסקנה</u>: יהי A חוג Noether. מספר אידיאלים ראשוניים מינימליים בו סופי.

כי האידיאלים הראשוניים המינימליים מתאימים למרכיבי אי-פריקות.

<u>מסקנה</u>. יהי A חוג Noether. אם כל הנקודות ב-Spec(A) סגורות, אז Spec(A) קבוצה בדידה סופית.