מבוא לגאומטריה אלגברית הרצאה 2

סיכום השיעור הקודם: למערכת משוואות ב-n משתנים
מעל חוג קומוטטיבי k התאמנו k-אלגברה

$$A = k[x_1,\dots,x_n]/I$$

כאשר I הוא האידיאל ב-$k[x_1,\dots,x_n]$ הנפרש על-ידי
המשוואות.

אוסף פתרונות של המערכת (נקרא לה X) ב-k-אלגברה L,
$X(L)$ ניתן לזהות עם אוסף ההומומורפיזמים $f: A \to L$
של k-אלגבראות וההתאמה מתאימה לכל $f: A \to L$
את הפתרון $(f(x_1),\dots,f(x_n)) \in L^n$.

בשפת הקטגוריות, הפונקטור $X: L \mapsto X(L)$
מיוצג על-ידי האלגברה $A = k[x_1,\dots,x_n]/I$.

לפעמים שפת הפונקטורים יותר נוחה מאשר שפת האלגבראות
שכן יותר קל לתאר פונקטור על קטגורית k-אלגבראות
מאשר האלגברה המייצגת אותו.

דוגמאות: 1. פונקטור $L \mapsto$ הקבוצה L.
הוא מיוצג על-ידי האלגברה $A = k[x]$

2. פונקטור $L \mapsto$ הקבוצה L^* של האיברים
ההפיכים ב-L. אפשר לבדוק כי הפונקטור
הזה מיוצג על-ידי האלגברה
$$A = k[x,y]/(xy-1).$$

3. ספקטרום של חוג קומוטטיבי

נקודה L: $f: A \to L$ נקראת גאומטרית אם L שדה.

אמרנו

אם f נקודה גאומטרית, $p := \mathrm{Ker}(f)$ הוא אידיאל ראשוני (prime):

הגדרה: אידיאל $p \subsetneq A$ נקרא ראשוני אם

1. $xy \in p \Leftarrow x \in p$ או $y \in p$.
2. חוג המנה A/p הינו תחום שלמות.

תרגיל: התכונות 1. ו-2. שקולות זו לזו.

דוגמאות: $(f) \subseteq k[t]$ (כאשר k שדה) ראשוני אם ורק אם f אי-פריק.

$(0) \subseteq k[t]$ ראשוני.

עתה נחקור את כל הנקודות הגאומטריות $f: A \to L$ המקיימות $\mathrm{Ker}(f) = p$. מתברר כי ישנה נקודה גיאומטרית "אוניברסלית" $\varphi: A \to k(p)$ כך ש כל נקודה גיאומטרית $f: A \to L$ עם $\mathrm{Ker}(f) = p$ מתקבלת כהרכבה

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & L \\ & k(p) \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

כאשר $\bar{f}$ הומו' של שדות.

<u>בניה של $k(p)$</u>

שלב ראשון: החוג $(B := A/p)$ הוא תחום שלמות.

נבנה עתה הומומורפיזם חח"ע $B \xrightarrow{\varphi} k(\mathfrak{p})$ כך שכל הומו' חח"ע $B \to L$ אל תוך שדה "עובר דרך φ":

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[dr] & L \\ & k(\mathfrak{p}) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

בניה של $k(\mathfrak{p})$ - שדה המנות:

איברים - זוגות (x,y) של איברי B: $y \neq 0$.
עוברים למנה מודולו יחס שקילות $(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow$
$xy' = x'y$.
ומגדירים פעולות חיבור וכפל כמו עם השברים.

<u>הגדרה</u> אוסף אידיאלים ראשוניים של חוג קומוטטיבי A נקרא ספקטרום של A. הסימון: $Spec(A)$.

<u>דוגמא</u>: $Spec(\mathbb{C}[x]) \longleftrightarrow \mathbb{C} \cup \{(0)\}$

$Spec(\mathbb{R}[x]) \longleftrightarrow \{(0)\} \cup \mathbb{R} \cup$ זוגות של מספרים מרוכבים צמודים

עוד מעט נגדיר מבנה של מרחב טופולוגי על $Spec(A)$.

כל איבר $a \in A$ מגדיר פונקציה על אוסף L-נקודות:
$a(x) \in L$ עבור $x: A \to L$. כיוון שיש לנו נקודות עם ערכים באלגברות שונות, הפונקציה שלנו קצת מוזרה - המקבלים ערכים השייכים לשדות שונים.

ובכן, כל איבר $a\in A$ מגדיר פונקציה שערך שלה בנקודה $p\in Spec(A)$ הוא שייך ל- $k(p)$

$$a(p)\equiv a \bmod p .$$

זה לא מאפשר להשוות את הערכים של פונקציה בנקודות שונות של $Spec(A)$, אך מאפשר, למשל, להשוות את הערכים לאפס:

למשל, $a(p)=0$ אם ורק אם $a\in p$.

לפעמים יש פונקציות שמתאפסות בכל נקודה: אלה הם איברים a השייכים לכל אידיאל ראשוני.

<u>משפט</u> יהי A חוג קומוטטיבי. ~~...~~ אזי

$$\bigcap_{p\in Spec(A)} p = N$$

כאשר N הוא אוסף איברים נילפוטנטיים ב- A,

$$N=\{a\in A \mid \exists n: a^n=0\}$$

<u>הוכחה</u> (משתמשת בלמה של Zorn)

יהי $a\in A$ איבר לא נילפוטנטי.

תהי M קבוצת האידיאלים I : I לא מכיל אף חזקה של a. לדוגמא, $(0)\in M$.

לפי למה של Zorn, קיים ב- M איבר מכסימלי. נסמנו ב- p ונוכיח כי הוא ראשוני.

נניח $p\ni xy$, $x,y\notin p$. $p+(x)$ מכיל חזקה של a, וגם $p+(y)$ מכיל חזקה של a:

$$\begin{cases} a^n\in p+(x) \\ a^m\in p+(y) \end{cases}$$

אזי $a^{m+n}\in p+(xy)=p$ סתירה.

<u>משפט</u> בכל חוג לא טריוויאלי קיים אידיאל מכסימלי ($p \notin A$).
<u>הוכחה:</u> תרגיל בשימוש בלמה של Zorn.

נציין כי כל אידיאל מכסימלי הוא ראשוני.

<u>דוגמא:</u> שתי משוואות:
$$\begin{cases} y-x^2=0 \\ y=t \end{cases}$$
(t פרמטר).
$$A_t=\mathbb{R}[x,y]/(y-x^2,y-t)$$

אנחנו מקבלים חוגים שונים עבור ערכים של t שונים:

$$\begin{aligned} &0<t && A_t \approx \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ &t=0 && A_t \approx \mathbb{R}[x]/(x^2) \\ &t<0 && A_t \approx \mathbb{C} \end{aligned}$$

(תרגיל).
נציין כי $\dim_{\mathbb{R}} A_t=2$, אך מבנה החוג הוא משתנה.

<u>קבוצות סגורות של Spec(A)</u> (טופולוגית Zariski)

לכל תת-קבוצה $E \subset A$ נגדיר
$$V(E)=\{p\in \mathrm{Spec}(A) \mid a(p)=0 \ \ \forall a\in E\}$$

<u>משפט</u> אוסף $\{V(E)\}$ הוא אוסף תת-קבוצות סגורות של טופולוגיה
<u>הוכחה</u> אפשר לבדוק כי $V(E_1)\cup V(E_2)=V(E_1E_2)$, $\cap V(E_i)=V(\cup E_i)$

משפט קבוצת הפונקציות המתאפסות על $V(E)$ היא

$$\mathrm{rad}(E) = \{a \in A \mid \exists n: a^n \in (E)\}$$

למה נתבונן בהומומורפיזם קאנוני:

$$\rho: A \longrightarrow A/I$$

ההתאמה $\rho^{-1}(\mathfrak{p}) \longleftarrow \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A/I)$

משרה התאמה חח"ע בין $\mathrm{Spec}(A/I)$ לבין $\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \supset I\}$.

הוכחה: תרגיל.

הוכחת המשפט: תרגיל.

הגדרה: רדיקל $\mathrm{rad}(I)$ של אידיאל I הוא

$$\mathrm{rad}(I) = \{a \in A \mid \exists n: a^n \in I\}.$$

אידיאל I נקרא <u>אידיאל רדיקלי</u> אם $I = \mathrm{rad}(I)$.

מסקנה: ההתאמה $I \longmapsto V(I)$ היא התאמה חח"ע בין אידיאלים רדיקליים של A לבין הקבוצות הסגורות של $\mathrm{Spec}(A)$.

פונקטוריאליות של Spec

יהי $f: A \to B$ הומו' של חוגים. נגדיר

$f^a: \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ על-ידי הנוסחא:

$$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(B) \longmapsto f^a(\mathfrak{p}) = f^{-1}(\mathfrak{p}).$$

<u>למה</u>: הגדרה f^a בעלת משמעות.

<u>הוכחה</u> $A/f^{-1}(p) \to B/p$ תמ"ע לפי משפט על איזומורפיזם, B/p תחום שלמות $\Leftarrow$ $A/f^{-1}(p)$ גם כן תחום שלמות.

<u>תרגיל</u>: הוכח כי f^a העתקה רציפה.

<u>מצביק ~~השרגות~~ עם טופולוגית Zariski</u>

1. נקודות ב- $Spec(A)$ אינן סגורות בדרך כלל.

יהי $p \in Spec(A)$.

$$\overline{\{p\}} = \bigcap_{E \subset p} V(E) = V(p) = \{q \in Spec(A) \mid q \supseteq p\}$$

לכן, נקודה p סגורה אם ורק אם היא מתאימה לאידיאל מכסימלי.

בפרט, אם A תחום שלמות, $\{0\} \in Spec(A)$ וזאת נקודה שהסגור שלה כל הספקטרום — "נקודה גנרית" generic point

<u>קבוצות פתוחות</u>: $D(E) = Spec - V(E)$

לכן,

$$D(\cup E_i) = \cup D(E_i)$$
$$D(E_1 E_2) = D(E_1) \cap D(E_2)$$

בפרט,

$$D(E) = \bigcup_{a \in E} D(a)$$

לכן, הקבוצות הפתוחות $D(a)$ מהוות בס"ס לטופולוגית Zariski,

$$D(a) = \{p \mid p \not\ni a\}.$$

יהי A תחום שלמות. אז $D(0)=\emptyset$ ושאר הקבוצות הפתוחות מכילות את אידיאל (0). בפרט, הן כולן צפופות ב-$Spec(A)$

<u>הגדרה</u> מרחב טופולוגי X נקרא אי-פריק אם

1) כל קבוצה פתוחה לא ריקה ב-X צפופה ב-X.

2) $U, V \neq \emptyset$ תת-קבוצות פתוחות $\Leftarrow U \cap V \neq \emptyset$.

3) $X = Z_1 \cup Z_2$ כאשר Z_i סגורות $\Leftarrow X = Z_1$ או $X = Z_2$

(תרגיל: הוכח כי $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$)

<u>משפט</u> $Spec(A)$ מרחב טופולוגי אי-פריק אם ורק אם $N = \{a \mid a^n = 0\}$ אידיאל ראשוני.

<u>הוכחה</u> אם N ראשוני, $Spec(A) \approx Spec(A/N)$ ואילו A/N תחום שלמות.

אם N אינו ראשוני, נסמן $B = A/N$ לא מכיל נילפוטנטים

נניח $ab = 0$, $a \neq 0, b \neq 0$ איברים ב-B

אז

$$Spec(B) = V(a) \cup V(b) = V(ab)$$

כיוון ש-a, b אינם נילפוטנטים, $V(a), V(b) \neq Spec(B) \Leftarrow \boxtimes$

<u>תרגיל בית מס' 1</u>

1. (חיתוך של פרבולה עם קו ישר) הוכח כי

$$A_t = \mathbb{R}[x,y] / (y - x^2, y - t)$$

איזומורפית ל-$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ אם $t > 0$,

$\mathbb{R}[x]/(x^2)$ $t = 0$

$\mathbb{C}$ $t < 0$

תשבו את $Spec(A_t)$ עבור t שונים.

2. מצאו את כל הפתרונות הרציונליים למשוואה

$$y^2=(x-a)^2(x-b)$$

כאשר a,b רציונליים.

3. יהי K שדה, $a\in K$.

לכל K-אלגברה L נגדיר

$$L' = L[t]/(t^2-a)$$

ונגדיר פונקטור

$$F: Alg_K \to Sets$$

על-ידי הנוסחא

$$F(L) = \underset{L}{Aut}(L') = \{f: L'\to L' \mid f|_L = id,\ f \text{ is autom.}\}$$

הוכח כי F אכן פונקטור וכי הוא מיוצג.
מצא את האלגברה המייצגת אותו.