גאומטריה אלגברית, הרצאה 17

קוהומולוגיה של המרחב הפרויקטיבי

יהי A חוג, $\mathbb{P}_A = \mathrm{Proj}\, A[T_1,\dots,T_r]$, $\deg T_i = 1$. $R: A[T_1 \dots T_r]$.
נחשב $H^p(\mathbb{P}_A, \mathcal{O}(n))$ לכל r, n, p.

נחשב את הקוהומולוגיה של Čech המתאימה לכיסוי $\mathbb{P}_A = \cup U_i$, $U_i = D_+(T_i)$.

עבור כל p, $U_{i_0,\dots,i_p} = D_+(T_{i_0}\cdots T_{i_p}) = \mathrm{Spec}\, A[T_0,\dots,T_r]_{(T_{i_0}\cdots T_{i_p})}$, כך ש-

$$\Gamma(U_{i_0 \dots i_p}, \mathcal{O}(n)) = \left\{ \frac{f}{(T_{i_0}\cdots T_{i_p})^k} \;\middle|\; f \in R_{k(p+1)+n} \right\}$$

זה מראה כי נוח יותר לחבר את כל $\mathcal{O}(n)$ ביחד (ואחרי כן להפריד את הרכיבים):

$$\Gamma\Big(U_{i_0 \dots i_p}, \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}(n)\Big) = \left\{ \frac{f}{(T_{i_0}\cdots T_{i_p})^k} \;\middle|\; f \in R \right\} =$$

$$= \left\{ s_{i_0 \dots i_p} \in R_{T_{i_0}\cdots T_{i_p}} \right\}$$

זה מתאר קומפלכס של Čech ~~מתאי~~ הנותן קוהומולוגיה עם המקדמים $\bigoplus \mathcal{O}(n)$. כדי לחשב את הקוהומולוגיה נתבונן בתת-קומפלכסים בהם $s_{i_0 \dots i_p}$ בעלי מכנה $(T_{i_0}\cdots T_{i_p})^k$ עם k חסום:

הגדרה

$$\check{C}^p_k(\mathcal{U}, \oplus\mathcal{O}(n)) = \left\{ (i_0,\dots,i_p) \mapsto \left\{ \frac{f_{i_0,\dots,i_p}}{(T_{i_0}\cdots T_{i_p})^k},\ f_{i_0\dots i_p} \in R \right\} \right\}$$

בשלב הראשון, נזהה את הקומפלכס $\check{C}^\bullet_k$ עם משהו פשוט יותר.

הגדרה יהי R חוג מדורג, $x_1,\dots,x_r$ איברים הומוגניים ב- R בעלי ~~דרגה~~ מעלה $d_1,\dots,d_r$.

קומפלקס של קוזול (Koszul) $K(\underline{x},R)$ הוא קומפלקס בעל רכיבים

$$K_0=R$$

$$K_1=\bigoplus_{i=1}^{k} R e_i$$

$$K_2=\bigoplus R e_i\wedge e_j$$

$$\dots$$

עם דיפרנציאל (בעל דרגה -1) המוגדר ע"י נוסחאות:

(1) $$d(e_i)=x_i$$

(2) $$d(e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_r})=\sum_{s=1}^{r}(-1)^{s-1}x_{i_s}\, e_{i_1}\wedge\dots\wedge\widehat{e_{i_s}}\wedge\dots\wedge e_{i_r}$$

זאת הכללה של 1

הערות מבנה של Koszul complex בעל משמעות גם במקרה לא מדורג. במקרה מדורג אנחנו יכולים להגדיר $\deg e_i=d_i$ ואז הדיפרנציאל ישמור על דירוג, כך שגם קוהומולוגיה תשמור על הדירוג.

משפט תהי $x_1,\dots,x_r$ סדרת איברים בחוג R כך ש-

- x_1 לא מחלק ה-0 ב- R
- x_{i+1} לא מחלק ה-0 ב- $R/(x_1,\dots,x_i)$

אז
$$H_i(K(\underline{x},R))=\begin{cases} R/(x_1,\dots,x_r) & i=0\\ 0 & i\neq 0\end{cases}$$

הוכחה חישוב של H_0 לא תלוי בתכונות הסדרה.

3 נוכיח את התכונה השניה באינדוקציה.

יהי L קומפלקס של Koszul הנבנה עבור הסידרה $x_1,\dots,x_{k-1}$. נבטא את K דרך L.

קודם כל, L הוא תת-קומפלקס של K. באו נחשב את המנה:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & L_{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & L_1 \arrow[r] \arrow[d] & L_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_k \arrow[r] \arrow[d] & K_{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & K_1 \arrow[r] & K_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bar K_k \arrow[r] & \bar K_{k-1} & & \bar K_1 \arrow[r] & \bar K_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ברור כי $\bar K_0=0$, ואילו $\bar K_{i+1}\approx L_i$ (נכון יותר, $\bar K_{i+1}=e_i\wedge L_i$)

<u>למה</u> תהי $0\to L\to K\to M\to 0$ סידרה מדויקת של קומפלקסים. אזי היא משרה סידרה מדויקת של קוהומולוגיות

$$\dots\to H^i(L)\to H^i(K)\to H^i(M)\to H^{i+1}(L)\to\dots$$

<u>הוכחה</u> זאת טענה <u>פשוטה</u> אך בסיסית ביותר באלגברה הומולוגית. קודם כל, יש להגדיר את ההומומ' של הומולוגיות:

$H^i(K)\to H^i(M)$, $H^i(L)\to H^i(K)$ מוגדרים באופן פשוט ביותר: $L\to K$ ו- $K\to M$ מעבירים ציקלוס לציקלוס ושפה לשפה.

מעניין יותר איך להגדיר הומומורפיזם $H^i(M)\to H^{i+1}(L)$. נתבונן בסדרה קדרה

$$\begin{tikzcd}
L^i \arrow[r] \arrow[d] & K^i \arrow[r] \arrow[d] & M^i \arrow[d] \\
L^{i+1} \arrow[r] & K^{i+1} \arrow[r] & M^{i+1}
\end{tikzcd}$$

אם $x\in M^i$ ציקלוס, ז.א. $dx=0$, נבחר את הנציג שלו $y\in K^i$ (כאן אין יחידות!). איבר y כבר לא חייב להיות ציקלוס: אני רק יודעים כי dy שייך לגרעין של $K^{i+1}\to M^{i+1}$. לכן, הוא שייך ל־L^{i+1}. תרגיל פשוט להראות כי איבר זה של L^{i+1} הוא ציקלוס וכי אם נבחר במקום y נציג אחר, נקבל ~~[illegible]~~ ציקלוס אחר של L^{i+1}, אך מגדיר אותו איבר בקוהומולוגיה.

שאר בדיקות אני משאיר כתרגיל.

במקום

נחזור למשפט שלנו: לפי הנחת האינדוקציה, $H_i(L)=0$ עבור $i>0$. $H_0(L)=R/(x_1,\dots,x_{k-1})$. ישנה סדרה מדויקת קצרה של הקומפלכסים

$$L\to K\to \bar{K}$$

שנותנת את הסדרה הארוכה המדויקת

$$\to H_i(L)\to H_i(K)\to H_i(\bar{K})\to H_{i-1}(L)\to\dots$$

כיוון ש־$\bar{K}$ היא בעצם L שהזזנו אותה באחת. זה נותן:

$$\begin{array}{ccccccccccc} H_1(L) & \to & H_1(K) & \to & H_1(\bar{K}) & \to & H_0(L) & \to & H_0(K) & \to & H_0(\bar{K}) \\ \| & & & & \| & & \| & & & & \| \\ 0 & & & & R/(x_1,\dots,x_{k-1}) & & R/(x_1,\dots,x_{k-1}) & & & & 0 \end{array}$$

ומקבלים מיד כי $H_i(K)=0$ עבור $2\leq i$. נשאר להבין מה קורה עם $H_1(K)$. לשם כך יש לתאר את ההומומורפיזם $H_1(\bar{K})\to H_0(L)$:

$\bar{K}_1=R\cdot e_k$, $\bar{K}_0=0$ כך שכל איבר $f\cdot e_k$ הוא ציקלוס ב־$\bar{K}_1$. אותו הביטוי $f\cdot e_k$ הוא נציגו ב־K_1, כך שתמונתו ב־K_0 היא $f\cdot x_k$. לכן,

הומומורפיזם $H_1(\bar{K})\to H_0(L)$ הוא הכפלה ב- x_k.
כיוון ש- x_k אינו מחלק 0 ב- $A/(x_1,\dots,x_{k-1})$, זה מוכיח את המשפט.

__הערה__ אם להיות יותר זהיר, אפשר להוכיח גם את הטענה ~~[illegible]~~ ההפוכה:
אם $(x_1,\dots,x_k)\neq R$ ואם $K(\underline{x},R)$ בעל הומולוגיות H_i^k טריוויאליות עבור $i>0$, אזי x_{i+1} אינו מחלק האפס ב- $R/(x_1,\dots,x_i)$ לכל i.

סדרת האיברים $x_1,\dots,x_k$ המקיימת את התכונות הבאות נקראת __סדרה רגולרית__.

נחזור עתה לחישוב $H^p(\mathbb{P}_A, \oplus\mathcal{O}(n))$.
נזכיר כי זאת קוהומולוגיה של קומפלקס Čech

$$\check{C}(\mathcal{U}, \oplus\mathcal{O}(n))$$

נזכיר גם כי איתרנו בו תת-קומפלכס $\check{C}_k(\mathcal{U},\oplus\mathcal{O}(n))$
המכיל את הרכיבים שבמכנה שלהם מאופשרת רק חזקה ה- k של $T_{i_0}\cdots T_{i_p}$

__למה__ הקומפלכס $(p\mapsto \check{C}^p_k(\mathcal{U},\oplus\mathcal{O}(n)))$ איזומורפי לקומפלקס Koszul
$$\left(p\longmapsto K_{r-p-1}(T_1^k,\dots,T_r^k,R)\right)$$
עבור $0\le p$

~~__שלב ראשון:__~~

~~נזכיר:~~
$$\cancel{\check{C}^p_k(\mathcal{U},\oplus\mathcal{O}(n)) = \prod_{i_0<\dots<i_p} \frac{R}{(T_{i_0}\cdots T_{i_p})^k}}$$

~~כל הרכיב איזומורפי ל- R, הרכיבים ממוספרים ע"י הסדרות $i_0<\dots<i_p$, ואילו הדיפרנציאל מעביר~~

6 <u>הוכחה</u> ההתאמה מעבירה איבר $\frac{f}{(T_{i_0}\cdots T_{i_p})^k}$

ל- $f e_{j_1}\wedge\dots\wedge e_{j_q}$

כאשר האינדקסים $j_1<\dots<j_q$ מוגדרים על-ידי השוויון

$$\{j_1,\dots,j_q\}=\{1,\dots,r\}\setminus\{i_0,\dots,i_p\}$$

<u>מסקנה</u>: הקוהומולוגיה $\check H^p(\mathcal{U}, \oplus\mathcal{O}(m))$ מתאפסת
עבור $p\neq 0, r-1$

<u>הוכחה</u> $H_0(K(T_1^k,\dots,T_r^k;R)) = \check H^{r-1}$; $\check H^0$ מובנע
עקב "השמטה" של האיבר K_r המתאים ל-$p=-1$.