גיאומטריה אלגברית ~ 16
קוהומולוגיות Čech (צֵ'ך)

תהי $\mathcal{F}$ אלומה של חבורות אבליות על מרחב טופולוגי X.
נקבע כיסוי פתוח $X=\bigcup_{i=1}^{n} U_i$. נסמן $\mathcal{U}=\{U_i\}$

נגדיר עתה קומפלקס $\check{C}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ (קומפלכס Čech של הכיסוי $\mathcal{U}$ עם מקדמים ב-$\mathcal{F}$).

רכיביו של קומפלכס Čech מוגדרים כדלקמן:

$$\check{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})=\prod_{i=1}^{n}\Gamma(U_i,\mathcal{F})$$

$$\check{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{F})=\prod_{i<j}\Gamma(U_{ij},\mathcal{F})$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\check{C}^k(\mathcal{U},\mathcal{F})=\prod_{i_0<\dots<i_k}\Gamma(U_{i_0\dots i_k},\mathcal{F})$$

$$\dots\dots\dots$$

כאן, כרגיל, אנחנו מסמנים $U_{i_0\dots i_k}=\bigcap_{l=0}^{k}U_{i_l}$.

לפני שנרשום נוסחה לדיפרנציאל $d:\check{C}^k\longrightarrow\check{C}^{k+1}$ באופן כללי, נתחיל עם המקרה $k=0$.
העתקה $d:\prod_i\Gamma(U_i,\mathcal{F})\longrightarrow\prod_{i<j}\Gamma(U_{ij},\mathcal{F})$ ניתנת על-ידי קביעת

הרכיב ה-(i,j) של $d(a)$, $a=\{a_i\}$, $a_i\in\Gamma(U_i,F)$.
ובכן, רכיב ה-(i,j) של $d(a)$ הוא

$$a_j|_{U_{ij}}-a_i|_{U_{ij}}.$$

קל מאוד להכליל את הנוסחא הנ"ל למקרה כללי:

הרכיב ה — $(i_0,\dots,i_{k+1})$ של $d(a)$, כאשר

$$a=\{a_{i_0,\dots,i_k}\in\Gamma(U_{i_0,\dots,i_k},F)\}$$

הוא

$$\sum_{n=0}^{k+1}(-1)^n a_{i_0,\dots,\hat{i}_n,\dots,i_{k+1}}\Big|_{U_{i_0,\dots,i_{k+1}}}$$

תרגיל משעמם אך פשוט הוא לבדוק כי $d\circ d=0$. נעשה זאת רק עבור ההרכבה $\check{C}^0\to\check{C}^1\to\check{C}^2$

יהי $a\in\check{C}^0$, $a=\{a_i\in\Gamma(U_i,F)\}$. אזי

$$d(a)_{ij}=a_j\big|_{U_{ij}}-a_i\big|_{U_{ij}}$$

ואילו

$$d\circ d(a)_{ijk}=d(a)_{jk}\big|_{U_{ijk}}-d(a)_{ik}\big|_{U_{ijk}}+d(a)_{ij}\big|_{U_{ijk}}$$

$$=(a_k-a_j)-(a_k-a_i)+(a_j-a_i)\big|_{U_{ijk}}=0.$$

נחשב עתה את קוהומולוגיות של קומפלקס Čech:

<u>הגדרה</u> $\check{H}^n(\mathcal{U},F)=H^n(\check{C}(\mathcal{U},F))$.

חישוב $\check{H}^0$: לפי הגדרה, $\check{H}^0=\ker(\check{C}^0\to\check{C}^1)$
זאת אוסף חתכים $a_i\in\Gamma(U_i,F)$ המתלכדים על החיתוכים.
כיוון שהנחנו כי F אלומה, מקבלים

<u>מסקנה</u> $\check{H}^0(\mathcal{U},F)=\Gamma(X,F)$.

נבדוק כי חבורת קוהומולוגיה הראשונה שהשתמשנו בחקר חבורת Picard, היא קוהומולוגיה של Čech.

<u>חישוב $\check{H}^1$</u>: לפי הגדרה, $\check{H}^1$ היא מנה של הגרעין של $\check{C}^1\to\check{C}^2$ מודולו התמונה של $\check{C}^0\to\check{C}^1$.

אוסף $\{a_{ij}\in\Gamma(U_{ij},F)\}$ שייך לגרעין אם לכל שלישיה $i<j<k$

$$a_{jk}-a_{ik}+a_{ij}\Big|_{U_{ijk}}=0$$

זה בדיוק תנאי קוציקלוס.

קוציקלוס הוא קו-שפה אם קיימים $b_i\in\Gamma(U_i,F)$ כך ש-
$$a_{ij}=b_j-b_i\Big|_{U_{ij}}$$

<u>הערה</u> ישנן שתי גרסאות של הנוסחאות - אחת משתמשת בסדרות מסודרות $i<j<\dots$ ואילו השניה - בכל הסדרות. לקומפלקסים המתקבלים אותה קוהומולוגיה; הקומפלקס הראשון "קטן יותר" כך שהוא נוח יותר בחישובים (למשל, השני תמיד אינסופי). בחישוב של קוהומולוגיה ראשונה השתמשנו קודם בגירסא "הלא מסודרת" כי היא יותר טוב מתארת

את תנאי ההדבקה. אבל אין קבול אמיתי: אם נתון אוסף $\{a_{ij}\}$ עבור $i<j$, נגדיר $a_{ii}=0$ ואילו $a_{ji}=-a_{ij}$ ואז כל קוציקלוס בקומפלקס הקטן יתן קוציקלוס בקומפלקס הגדול.

<u>הערה</u> כמו בדיון על חבורת פיקאר, מגדירים קוהומולוגית Čech של אלומה F על ידי הנוסחא

$$\check{H}(X,F)=\operatorname*{colim}_{\mathcal{U}}\check{H}(\mathcal{U},F)$$

(גבול לפי עידונים של כיסויים).

המשפט הבא משווה את הקוהומולוגיה $\check{H}(\mathcal{U},F)$ עם "קוהומולוגיה נכונה" המוגדרת <u>כפונקטור נגזר</u> מהפונקטור $F\mapsto\Gamma(X,F)$. בלי להיכנס לתאוריה עמוקה, נציין רק כי בפרט הוא יאפשר לקבוע אי-תלות של $\check{H}(\mathcal{U},F)$ בכיסוי $\mathcal{U}$.

<u>משפט</u> יהי X מרחב טופולוגי ויהי F אלומה של חבורות אבליות. תהי $\mathcal{U}$ משפחה של תת-קבוצות פתוחות של X המקיימת את התכונות:

- איברי $\mathcal{U}$ מהווים בסיס של טופולוגיה ב-X
- $U_1,U_2\in\mathcal{U}\Leftarrow U_1\cap U_2\in\mathcal{U}$

אזי אם $\check{H}^i(U,F)=0$ לכל $U\in\mathcal{U}$ לכל $i>0$, ההומומורפיזם הקנוני

$$\check{H}^n(\mathcal{U},F)\longrightarrow H^n(X,F)$$

הוא איזומורפיזם לכל כיסוי $\mathcal{V}$ הבנוי מאיברי $\mathcal{U}$.

<u>הערה</u> כיוון שאנו לא יודעים מה זה "קוהומולוגיה נכונה", דבר יחיד שיכולים אנו להסיק כי ניתן לחשב את קוהומולוגית Čech באמצעות כל כיסוי של X באיברי $\mathcal{U}$.

קוהומולוגית Čech של אלומה קוואזי-קוהרנטית.

תהי $X=\mathrm{Spec}(A)$ סכימה אפינית, $F=\widetilde{M}$ אלומה קוואזי-קוהרנטית. ויהיו $f_1,\dots,f_n \in A$: $(f_1,\dots,f_n)=1$, ויהי $\mathcal{U}=\{D(f_i)\}$ כיסוי של X. נוכיח כי

$$\check{H}^i(\mathcal{U},F)=0 \quad , i>0$$

מדובר כאן בקומפלקס הנתון רק:

$$0 \to \prod_i M_{f_i} \to \prod_{i<j} M_{f_i f_j} \to \dots$$

אנחנו יודעים כי $\check{H}^0(\mathcal{U},F)=M$ ורוצים להוכיח כי שאר הקוהומולוגיות מתאפסות.

<u>מקרה 1</u> $f_1=1$, זאת אומרת, אחת איברי הכיסוי הוא כל המרחב.
במקרה זה אנחנו נבנה מה שנקרא "הומוטופיה מכווצת" של $\check{C}$:

נבנה אוסף העתקות $s:\check{C}^k \to \check{C}^{k-1}$, $k\geq 1$
המקיימת את התכונה $sd+ds=id$

נגדיר $s:\check{C}^{k+1} \to \check{C}^k$
על-ידי הנוסחא

$$s(a)_{i_0,\dots,i_k} = a_{1,i_0,\dots,i_k} \quad (i_0\neq 1)$$
$$= 0 \quad (i_0=1)$$

חישוב פשוט מראה כי

$$sd(a) + ds(a) = a$$

ואז, אם $da=0$, $a=ds(a)$ הוא שפה $\Leftarrow$ קוהומולוגיה שווה ל-0.

~~בדרך כלל מקרה [illegible]~~

<u>מקרה כללי</u> קומפלקס Čech שבנינו הוא קומפלקס של A-מודולים. כיוון שלוקליזציה בפונקטור מדויק, ואילו $M=0 \iff$ לכל i: $M_{f_i}=0$ (נזכיר כי $1=(f_1,\dots,f_n)$)

מספיק לנו לבדוק כי לכל i הלוקליזציה $\check{C}_{f_i}$ היא קומפלקס מדויק.

אבל לוקליזציה כזו היא קומפלקס של Čech עבור החוג A_{f_i}, המודול M_{f_i} והכיסוי $(f_1,\dots,f_n)$ שאחד הרכיבים הוא $Spec(A_{f_i})$ כולו.

זה סוף ההוכחה.

<u>מסקנה</u>: תהי $(X,\mathcal{O}_X)$ סכימה המקיימת תכונה: חיתוך שתי קבוצות פתוחות אפיניות גם כן אפיני. אז קוהומולוגית Čech $\check{H}(X,F)$ עם מקדמים קוואזי-קוהרנטיים ניתן לחשב בעזרת כל כיסוי אפיני.

<u>תרגיל</u> הוכח כי כל סכימה $X=Proj(A)$ מקיימת את התכונה.