גיאומטריה אלגברית - 15   חבורת Picard - המשך

<u>דוגמא</u> יהי A חוג מדורג הנוצר ע"י A_1 מעל A_0.
אזי

$$X=Proj(A)=\bigcup_{f\in A_1} D_+(f)$$

כאשר $D_+(f)$ אוסף אידיאלים מדורגים ראשוניים הלא מכילים את f.

נזכיר כי $D_+(f)\approx Spec\, A_{(f)}$ כאשר $A_{(f)}=\{\frac{x}{f^n},\ x\in A_n\}$.

נגדיר 1-קוציקלוס של הכיסוי $X=\bigcup U_f$, $U_f=D_+(f)$:

$$s_{fg}=\left(\frac{f}{g}\right)^n\in \mathcal{O}_X^*(U_f\cap U_g)$$

כאשר $n\in\mathbb{Z}$ קבוע. נציין כי $s_{ff}=1$, $s_{fg}\cdot s_{gh}=s_{fh}$
כך ש $\{s_{fg}\}$ הוא אכן קוציקלוס.

האלומה המוגדרת ע"י $\{s_{fg}\}$ נקראת $\mathcal{O}_X(n)$.

לפי התרגיל של השיעור הקודם, $\mathcal{O}_X(n)=\mathcal{O}_X(1)^{\otimes n}$.

הגיע זמן להתאים את הסימונים שלנו למה שמקובל.
אם F קדם-אלומה, $U\subset X$, אוסף חתכים של F על U
מסומן $F(U)$. אך מקובל לסמן את הקבוצה כ- $\Gamma(U,F)$.
זה מאפשר לדבר ביתר נוחות על הפונקטור

$$F\longmapsto F(U)$$

מקטגוריית קדם אלומות (או אלומות) לקטגוריית הקבוצות
(או חבורות אבליות או...)
אם M אלומת המודולים מעל $(X,\mathcal{O})$, $\Gamma(X,M)$ היא
מודול מעל החוג $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$.
נשווה את המכפלה הטנזורית של אלומות ושל החתכים.

<u>למה</u>. קיים הומומ' קנוני

$$\Gamma(X,M) \underset{\Gamma(X,\mathcal{O})}{\otimes} \Gamma(X,N) \longrightarrow \Gamma(X, M\otimes N)$$

<u>הוכחה</u> תהי K קדם-אלומה המוגדרת על-ידי הנוסחא

$$K(U) = M(U) \underset{\mathcal{O}(U)}{\otimes} N(U)$$

אזי $M\otimes N$ האלומה של K, כך שאם $m \in \Gamma(X,M)$, $n \in \Gamma(X,N)$ אזי $m\otimes n \in K(X)$ מגדיר חתך של $M\otimes N$ מעל X.

בי-לינאריות נבדקת מיידית.

<u>מסקנה</u> יהי $X = Proj(A)$. אזי $\bigoplus_{n\geq 0} \Gamma(X,\mathcal{O}(n))$ חוג מדורג.

נגדיר העתקות $\alpha_n : A_n \to \Gamma(X,\mathcal{O}(n))$ על-ידי הנוסחאות

$$\alpha_n(h)\Big|_{D_+(f)} = h/f^n \in \mathcal{O}\Big|_{D_+(f)}$$

כיוון ש $h/g^n = h/f^n \cdot \left(\frac{f}{g}\right)^n$, החתכים h/f^n נדבקים בדיוק על-ידי הקוציקלוס g_{fg} המגדיר את $\mathcal{O}(n)$.

<u>מסקנה</u> יהי A_0 חוג Noether, A_1 נוצר סופית מעל A_0. אזי ההומומורפיזם חוגים מדורגים

$$\alpha : A \longrightarrow \bigoplus_{n\geq 0} \Gamma(X,\mathcal{O}(n))$$

הוא איזומורפיזם עבור n מספיק גדולים.

הוכחה (חלקית).
קודם כל, α_n העתקות לינאריות, ומתנהגות עם הכפל:

$$h \in A_n\,,\quad h' \in A_m \Leftarrow hh' \in A_{m+n}\,,$$

$$\alpha_n(h)\Big|_{D_+(f)} = h/f^n\,, \quad \alpha_m(h')\Big|_{D_+(f)} = h'/f^m$$

$$\alpha_{n+m}(hh')\Big|_{D_+(f)} = hh'/f^{m+n} = \alpha_n(h)\,\alpha_m(h')$$

נוכיח כי α חח"ע עבור n גדולים.
אם $h \in \ker\alpha_n$, $h/f^n = 0$ לכל $f \in A_1$,
כלומר לכל f קיים N: $h \cdot f^N = 0$. כיוון ש-A_1 נוצר סופית מעל A_0, ואלה פורשים את כל A, קיים N כך ש $h \cdot A_N = 0$.
יהי I אידיאל ב-A של איברים המאפסים חזקה מסוימת של A_1. A_0 חוג נתר, A אלגברה נוצרת סופית מעל A_0,
לכן A חוג Noether $\Leftarrow$ I אידיאל ב-A נוצר סופית.
כיוון שכל איבר בו מאפס A_N עבור N גדול, I נוצר סופית כמודול מעל $A_0 \Leftarrow I_n = 0$ עבור n מספיק גדול.

השאר יוכח מאוחר יותר.

חישוב חבורות <u>Picard</u>

<u>משפט</u> A תחום עם פרוק $\Leftarrow \operatorname{Pic} A = \{0\}$

<u>הוכחה</u> מספיק להוכיח כי
$$H^1(\{D(f_i)\}, \mathcal{O}^*) = 0$$
עבור כיסוי $\operatorname{Spec}(A) = \cup D(f_i)$.

יהי $\{s_{ij}\}$ 1-קוציקלוס. זה אומר כי $s_{ij} \in A_{f_if_j}$.

יהי K שדה המנות של A.

מתקיים $s_{ij} = s_{i1}\cdot s_{1j}$ כך שאפשר לכתוב $(t_i = s_{i1})$

$$s_{ij} = t_i / t_j$$

(כל השוויונות ב- K). אנחנו רוצים להראות כי ניתן לבחור t_i: $t_i \in A_{f_i}$.

<u>סימון</u>: אם $p \in A$ ראשוני, ו- $a \in A$ אז $v_p(a)$ החזקה של p בפרוק של a לראשוניים.

נקבע p ונחלק את הקבוצה $\{f_1,\dots,f_n\}$ לשתי תת-קבוצות: $\{1,\dots,n\} = J \cup \mathcal{J}$: $v_p(f_i) > 0 \Leftrightarrow i \in J$. מתקיים $\mathcal{J} \neq \emptyset$ כי $(f_1,\dots,f_n) = 1$.

לכל $i,j \in \mathcal{J}$ המנה t_i/t_j הפיכה ב- $A_{f_i f_j}$

$\Leftarrow$ $v_p(t_i) = v_p(t_j)$ לכל $i,j \in \mathcal{J}$. נסמן את המספר המשותף הזה ב- v_p. נגדיר

$$u_i = \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{-v_p}\right) t_i$$

כאשר $\mathcal{P}$ אוסף (סופי) של כל הראשוניים המעורבים (אלה שמופיעים כגורמים של f_i).
אוסף $\{u_i\}$ מגדיר אותו הקוציקל $s_{ij} = u_i / u_j$, ואילו

$$v_p(u_i) = v_p(t_i) - v_p$$

מספר זה שווה ל- 0 לכל p: $p \nmid f_i$ $\Leftarrow$ u_i הפיך ב- A_{f_i}.

<u>סוף ההוכחה</u>

<u>מסקנה</u>: יהי A תחום עם פרוק (למשל, שדה). אזי $\mathrm{Pic}\,\mathbb{P}^n_A = \{\mathcal{O}(n)\}$ – החבורה הציקלית האינסופית הנוצרת ע"י $\mathcal{O}(1)$.

<u>הוכחה</u> לפי הלמה של Gauß $A[T_0/T_i, \dots, T_n/T_i]$ חוג עם פרוק
$\Leftarrow$ כל אלומה הפיכה עליו טריוויאלית (איזומורפית לו).

לכן, מספיק

לכן כל אלומה הפיכה על $\mathbb{P}^n_A$ מוגדרת ע"י קוציקלוס של הכיסוי

$$X = \bigcup U_i = \operatorname{Spec} A[T_0/T_i, \dots, T_n/T_i]$$

יהי $\{s_{ij}\}$ קוציקלוס $s_{ij} \in A[T_0 \dots T_n]_{(T_iT_j)}$

הפיך. לכן

$$s_{ij} = \varepsilon_{ij}\left(\frac{T_i}{T_j}\right)^{n_{ij}} \qquad \varepsilon_{ij} \in A^*, \; n_{ij} \in \mathbb{Z}$$

תנאי קוציקלוס קובעים כי n_{ij} לא תלויים באינדקסים

$$s_{ij} = \varepsilon_{ij}\left(\frac{T_i}{T_j}\right)^{n}$$

זה גורר כי גם ε_{ij} הם מקיימים תנאי קוציקלוס. אזי
$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_i/\varepsilon_j$ וכיוון ש- $\varepsilon_{ij} \in A^*$ - הערכים גלובליים $\Leftarrow$
$\{s_{ij}\} \sim \; i,j \mapsto (T_i/T_j)^n$

זה נותן את האלומה $\mathcal{O}(n)$.

נשאר להוכיח כי: $\mathcal{O}(n) \not\cong \mathcal{O}(m)$ עבור $m \neq n$. זה נובע
מהחישוב הבא:

<u>למה</u>

$$\Gamma(\mathbb{P}^n_A, \mathcal{O}(k)) = \begin{cases} 0 & k<0 \\ A[T_0, \dots, T_n]_k \end{cases}$$

<u>הוכחה</u> האיזומורפיזם של חוגים מדורגים

$$\alpha : A[T_0, \dots, T_n] \to \bigoplus_{k \geq 0} \Gamma(\mathbb{P}^n_A, \mathcal{O}(k))$$

נבנה בתחילת השיעור. נוכיח כי הוא איזומורפיזם.

$$\alpha(h)\Big|_{D_+(T_i)} = h/T_i^k \qquad k\geq 0$$

α תת"ע כי T_i לא מחלק ה-0 ב- $A[T_0,\dots,T_n]$.
נוכיח כי α אפימורפיזם.

חתך של $\mathcal{O}(k)$ מעל $\mathbb{P}^n_A$ ניתן ע"י קבוצת

$$f_i \in A[T_0/T_i, \dots, T_n/T_i]$$

המקיימים את התכונה $f_i\,(T_i/T_j)^k = f_j$

T_i אינם מחלקי האפס - התנאי שקול לשוויון $f_iT_i^k = f_jT_j^k$.

מצד שני, המכנה של $f_iT_i^k$ יכול להכיל רק T_i, לכן $f_iT_i^k$ פולינום בעל דרגה k.

אם $k<0$, אין כאלה, לכן אין חתכים של $\mathcal{O}(k)$ עבור $k<0$.

<u>מסקנה:</u> $\mathcal{O}(m) \neq \mathcal{O}(n)$.
ואמנם, החתכים שלהם מודולים חפשיים מעל A בעלי דרגות שונות.

<u>תרגיל</u> הוכח כי כל אוטומורפיזם

$$f : \mathbb{P}^n_k \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$$

ניתן ע"י אוטומורפיזם של המרחב הוקטורי $\langle T_0,\dots,T_n\rangle$.
<u>רמז:</u> להשתמש בפעולה של f על אלומות הפיכות
ועל חבורת פיקר.