גאומטריה אלגברית, הרצאה 14

נדון הגדרה יותר מקובלת של אלומות קוואזי-קוהרנטיות

<u>הגדרה</u> אלומת מודולים F על סכימה X נקראת קוואזי-קוהרנטית
אם לכל $x\in X$ קיימת סביבה U והומומ' של מודולים חפשיים
מעל U:

$$f:\mathcal{O}_U^J\to\mathcal{O}_U^I$$

יחד עם איזומורפיזם

$$\mathrm{Coker}(f)\cong F|_U.$$

הגדרה זו אין לה משמעות גדולה מחוץ לעולם של סכימות. לעומת זאת, מושג אלומה קוהרנטית משמעותו גדולה גם בגיאומטריה אנליטית (תורת יריעות מרוכבות).

<u>הגדרה</u> 1. אלומת מודולים F על מרחב מחוג' $(X,\mathcal{O})$ נקראת נוצרת סופית אם לכל $x\in X$ קיימת סביבה פתוחה U ואפימורפיזם אלומות

$$\mathcal{O}_U^n\to F|_U\to 0\qquad(\star)$$

2. אלומה F נקראת קוהרנטית אם היא נוצרת סופית ואילו גרעין של כל אפימורפיזם $(\star)$ גם הוא נוצר סופית.

ברור כי כל אלומה קוהרנטית היא קוואזי-קוהרנטית. כדי לחקור אלומות קוהרנטיות על סכימות, כדאי להבין קודם כל את המקרה האפיני.

<u>למה</u> יהי A חוג Noether. אזי האלומה $\tilde{M}$ קוהרנטית אם ורק אם המודול M נוצר סופית.

<u>הוכחה</u> אם M נוצר סופית, קיימת העתקה על $A^n\to M$ והגרעין שלה נוצר סופית כי הוא תת-מודול במודול Noether A^n.

$\square$

<u>הגדרה</u> סכימה $(X,\mathcal{O})$ נקראת סכימת Noether מקומית (locally noetherian scheme) אם יש לה כיסוי על ידי $Spec(A)$ כאשר A חוג Noether.

אלומת מודולים על סכימת Noether מקומית היא אלומה קוהרנטית אם ורק אם היא נוצרת סופית.

אלומות הפיכות וחבורת פיקאר (Picard)

0. אם M, N מודולים מעל חוג קומוטטיבי A, אפשר להגדיר מודול חדש

$$M \underset{A}{\otimes} N$$

- מכפלה טנזורית של M ו- N. מודול M נקרא הפיך אם קיים N כך ש- $M\otimes N \approx A$ (נציין כי $M\otimes A \approx M$ כך שהחוג עצמו משחק תפקיד של "איבר היחידה").

1. <u>הגדרות</u> יהיו M,N,K שלשה A-מודולים. העתקה <u>דו-לינארית</u>

$$f: M\times N \to K$$

היא העתקה שהיא לינארית לפי כל אחד מהארגומנטים:

$$f(am,n) = f(m,an) = a\,f(m,n)$$
$$f(m+m',n) = f(m,n) + f(m',n)$$
$$f(m,n+n') = f(m,n) + f(m,n')$$

<u>הגדרה</u> העתקה דו-לינארית $f: M\times N \to K$ נקראת אוניברסלית אם ההרכבה

$$(\alpha: K\to K') \longmapsto \alpha\circ f : M\times N \to K \to K'$$

מגדירה התאמה חח"ע בין $Hom_A(K,K')$ לבין אוסף העתקות דו-לינאריות

$$M\times N \to K'$$

משפט 1. העתקה דו-לינארית אוניברסלית

$$f: M\times N \to K$$

קיימת ויחידה עד כדי איזומורפיזם יחיד.

2. ניתן לתאר את K ואת f כדלקמן:

א. נגדיר X מודול חופשי על קבוצת היוצרים מהצורה $m\otimes n$, $m\in M$, $n\in N$

ב. נגדיר K כמנה של X מודולו תת-מודול הנפרש ע"י האיברים

$$(am)\otimes n - a(m\otimes n)$$
$$m\otimes an - a(m\otimes n)$$
$$(m+m')\otimes n - m\otimes n - m'\otimes n$$
$$m\otimes(n+n') - m\otimes n - m\otimes n'$$

הוכחה ברור.

הסימון: $K = M\otimes N$

2. למה קיים איזומורפיזם קנוני

$$\mathrm{Hom}(M\otimes N, K) \cong \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N,K))$$

הוכחה לפי ההגדרה - שניהם מתארים אוסף העתקות דו-לינאריות $M\times N \to K$.

3. יהי $(X,\mathcal{O})$ מרחב מתני"ג.

הגדרה אלומת מודולים L נקראת הפיכה אם היא איזומורפית מקומית ל-$\mathcal{O}$:

$$\forall x\in X\ \exists U\ni x \mid L|_U \cong \mathcal{O}_U$$

הגדרה זו שקולה במקרים מעניינים (כמו סכימות) להגדרת הפיכות עבור מודולים. יותר מדויק, ניתן להוכיח כי מודול M הפיך אם ורק אם האלומה $\tilde{M}$ הפיכה (=חפשית מקומית בעלת דרגה 1).

בכל מקרה, אלומה הפיכה היא קוואזי-קוהרנטית כך שאפשר לעבוד איתה כמו עם מודולים:

כמה פעולות עם אלומות מודולים.

1) F, G אלומות מודולים מעל $(X,\mathcal{O})$ $\Leftarrow$ אנו יודעים להגדיר

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F,G)$$

וזה מודול מעל $\mathcal{O}(X)$.

נגדיר עכשיו אלומה $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}}(F,G)$ של מודולים כך שהחתכים הגלובליים שלה יהיו $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F,G)$.

<u>הגדרה</u>

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}}(F,G)(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(F|_U, G|_U).$$

<u>למה</u> אם X סכימה אפינית, $F=\tilde{M}$, $G=\tilde{N}$ אזי

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}}(F,G) = \widetilde{\mathrm{Hom}_A(M,N)}$$

<u>הוכחה</u> אנו כבר יודעים כי $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F,G) = \mathrm{Hom}_A(M,N)$.
לכן,

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}}(F,G)(D(f)) = \mathrm{Hom}_{A_f}(M_f, N_f)$$

נשאר לוודא כי מודול זה זהה ללוקליזציה של $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ לפי $\{f\}$.

נשאיר את זה בלי הוכחה:

<u>למה</u> יהי A חוג קומוטטיבי, S קבוצה כפלית, M,N מודולים.
אזי הומומורפיזם המושרה ע"י לוקליזציה

הנחות: מודול M בעל הצגה סופית:
$A^m \to A^n \to M \to 0$

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A_f}(M_f,N_f)$$

משרה איזומורפיזם של A_f-מודולים

$$\mathrm{Hom}_A(M,N)_S \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A_S}(M_S,N_S)$$

□

<u>מסקנה</u>: אם F,G אלומות קוואזי-קוהרנטיות על $(X,\mathcal{O})$
אזי $\underline{\mathrm{Hom}}(F,G)$ גם היא קוואזי-קוהרנטית.

באותה דרך ניתן להגדיר מכפלה טנסורית של אלומות
ולוודא כי המכפלה הטנסורית של אלומות קוואזי-קוהרנטיות היא
אלומה קוואזי-קוהרנטית.

<u>למה</u> A, S, M,N כמו בלמה הקודמת. אזי
הומומורפיזם של A-מודולים

$$M\otimes_A N \longrightarrow (M_S\otimes_{A_S} N_S)$$

הניתן ע"י הנוסחא $m\otimes n \longmapsto m/1 \otimes n/1$

משרה איזומורפיזם

$$(M\otimes_A N)_S \longrightarrow M_S\otimes_{A_S} N_S$$

כמסקנה אנו מקבלים כי $\otimes$ מוגדרת על אלומות קוואזי-קוהרנטיות

תהי עתה L אלומה הפיכה. נגדיר
$L' = \underline{Hom}(L, \mathcal{O})$.

ההומו' הטבעי
מוגדר ע"י ההצבה

$$L \otimes_{\mathcal{O}} L' \longrightarrow \mathcal{O}$$

$$x \in L(U)$$
$$f \in L'(U) = Hom_{\mathcal{O}_U}(L|_U, \mathcal{O}_U)$$
$$x, f \longmapsto f(x).$$

כיוון ש L איזומורפי מקומית ל- $\mathcal{O}$, גם L' איזומורפי מקומית ל- $\mathcal{O}$, וההומומורפיזם שהגדרנו הוא איזומורפיזם.
זה מוכיח כי כל אלומה הפיכה לפי ההגדרה שנתנו, היא הפיכה גם ביחס לפעולה $\otimes$.

את זה רק נשאיר בלי הוכחה.
אוסף מחלקות איזומורפיות של אלומות הפיכות מהווה חבורה הנקראת (Picard group)

<u>מיון של אלומות הפיכות</u>

יהי $(X, \mathcal{O})$ מרחב מחוייג, $X = \cup U_i$ כיסוי פתוח.
אנו רוצים לתאר את כל האלומות ההפיכות L:
$L|_{U_i} \approx \mathcal{O}_{U_i}$.

נקבע את האיזומורפיזמים $f_i : \mathcal{O}_{U_i} \to L|_{U_i}$

נתמקד בצמצום $L|_{U_{ij}}$ כאשר $U_{ij} = U_i \cap U_j$.

ישנם שני איזומורפיזמים $f_i, f_j : \mathcal{O}_{U_{ij}} \to L|_{U_{ij}}$

- אחד הוא צמצום של f_i, $f_i|_{U_{ij}}$ והשני הוא $f_j|_{U_{ij}}$.
אפשר להרכיב אותם ולקבל

$$\varphi_{ij} = f_j^{-1}|_{U_{ij}} \circ f_i|_{U_{ij}} : \mathcal{O}|_{U_{ij}} \to \mathcal{O}|_{U_{ij}}$$

הומומורפיזם של A-מודולים $\varphi: A \to A$ נתון ע"י התמונה של 1, $\varphi(1)$. הומומורפיזם φ כזה נתון ע"י הנוסחא

$$\varphi(x) = \varphi(1) \cdot x$$

והוא הפיך אם ורק אם $\varphi(1)$ הפיך.

לכן, $\varphi_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$ - חתך הפיך של אלומת המבנה מעל הקבוצה U_{ij}.

אוסף החתכים $\varphi_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$ מקיימים את התכונות הבאות:

1) $\varphi_{ii} = 1$

2) $\varphi_{jk}|_{U_{ijk}} \circ \varphi_{ij}|_{U_{ijk}} = \varphi_{ik}|_{U_{ijk}}$

<u>הגדרה</u> יהי $(X, \mathcal{O})$ מרחב מחוייג, $X = \cup U_i$ כיסוי פתוח, אוסף חתכים $\varphi_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$ המקיימים את התכונות

1) $\varphi_{ii} = 1$

2) $\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik}$

נקרא 1-קוציקל של $\mathcal{O}^*$ (ביחס לכיסוי $\{U_i\}$).

נזכיר כי אפשר לשחזר את האלומה L אם ידוע 1-קוציקלים $\{\varphi_{ij}\}$. האלומה L מתקבלת ע"י הדבקה של האלומות $\mathcal{O}_{U_i}$ בעזרת האיזומורפיזמים φ_{ij}.

נשאר להבין מתי שני 1-קוציקלים מגדירים אלומות איזומורפיות.

יהיו $\{\varphi_{ij}\}$ ו-$\{\psi_{ij}\}$ שני 1-קוציקלים, ויהיו L_φ, L_ψ שתי אלומות הפיכות המתאימות ל-φ ול-ψ. איזומורפיזם $F: L_\varphi \to L_\psi$ נתון ע"י אוסף איזומורפיזמים של הצמצומים

$$F|_{U_i} : L_\varphi|_{U_i} \xrightarrow{\sim} L_\psi|_{U_i} \quad (\star)$$

כיון שכל צמצום מזוהה עם $\mathcal{O}_{U_i}$, $F|_{U_i}$ נתון ע"י אוסף $f_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$.
איזומורפיזמים $(\star)$ חייבים להיות מתואמים עם ההדבקה. אם נתרגם את התנאי לשפה של f_i, φ_{ij}, ψ_{ij}, נקבל את התנאי:

$$\psi_{ij} \cdot f_i|_{U_{ij}} = f_j|_{U_{ij}} \cdot \varphi_{ij}$$

(הרכבה כאן היא כפל קומוטטיבי, כך שסדר הגורמים אינו חשוב).

<u>הגדרה</u> שני 1-קוציקלים $\{\varphi_{ij}\}$, $\{\psi_{ij}\}$ נקראים הומולוגיים (שקולים הומולוגית) אם קיים אוסף $f_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$ כך ש

$$\psi_{ij} = f_j|_{U_{ij}} f_i^{-1}|_{U_{ij}} \varphi_{ij} .$$

<u>תרגיל</u> הוכח כי אם $\{\varphi_{ij}\}$ ו-$\{\psi_{ij}\}$ מגדירים את האלומות L_φ, L_ψ, אז $\{\varphi_{ij}\psi_{ij}\}$ גם קוציקל וכי הוא מגדיר את האלומה $L_\varphi \otimes L_\psi$.