גיאומטריה אלגברית, הרצאה 13

אלומות מודולים

1. יהי $(X,\mathcal{O})$ מרחב מחו"ג.

__הגדרה__ קדם-אלומה של $\mathcal{O}$-מודולים היא קדם-אלומה של חבורות אבליות $U\mapsto M(U)$, $U\in Open(X)$, יחד עם פעולה של $\mathcal{O}$:

$$\mathcal{O}(U)\times M(U)\longrightarrow M(U)$$

ההופכת את $M(U)$ ב-$\mathcal{O}(U)$-מודול, וכך שמבנה זה מתואם עם הצמצומים: הדיאגרמה

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(U)\times M(U) \arrow[r] \arrow[d] & M(U) \arrow[d] \\
\mathcal{O}(V)\times M(V) \arrow[r] & M(V)
\end{tikzcd}$$

קומוטטיבית.

__הגדרה__ קדם-אלומה של מודולים נקראת אלומה של מודולים אם היא אלומה.

בשיעורים הקודמים הסברנו איך קדם-אלומה (של קבוצות) מגדירה אלומה: אם F קדם-אלומה, חישבנו את קבוצות הגבעולים $F_x=\operatorname{colim}_{U\ni x}F(U)$ והגדרנו $\tilde{F}$ כתת-קדם אלומה של $U\mapsto\prod_{x\in U}F_x$ המכילה את החתכים שניתנים מקומית על-ידי חתכים של F. זה מגדיר אלומה $\tilde{F}$ יחד עם העתקת קדם-אלומות

$$F\longrightarrow\tilde{F}$$

ותכונה אוניברסאלית של $\tilde{F}$: כל העתקת קדם-אלומות

$$F\longrightarrow G$$

מ- F לאלומה G ניתן להציג באופן יחיד בהרכבה

$$F \longrightarrow \tilde{F} \longrightarrow G.$$

<u>תרגיל</u> הוכח כי F אלומה אם ורק אם $F \to \tilde{F}$ איזומורפיזם.

<u>למה</u> יהי $(X,\mathcal{O})$ מרחב מחו"ג, M קדם-אלומה של מודולים. אזי $\tilde{M}$ אלומה של מודולים (והתכונה האוניברסלית כמו דלעיל מתקיימת לאלומות מודולים).

<u>הוכחה</u>
1. לכל x M_x מודול מעל $\mathcal{O}_x$: אם $\bar{m} \in M_x$ תמונה של חתך $m \in M(U)$, $U \ni x$, ואם $\bar{f} \in \mathcal{O}_x$ תמונה של $f \in \mathcal{O}(V)$ אז אפשר לצמצם את m ואת f לחתכים $\tilde{m} \in M(U \cap V)$, $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U \cap V)$, להכפיל אותם ולקחת תמונה ב- M_x.

2. האלומה $U \mapsto \prod_{x \in U} M_x$ היא אלומת המודולים:

אם $f \in \mathcal{O}(U)$, $(m_x) \in \prod_{x \in U} M_x$ חתך מעל U, אפשר להשתמש בהומומורפיזמים $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}_x$ כדי להכפיל f ב- (m_x).

3. נשאר לוודא כי $\tilde{M} \subseteq \prod M_x$ תת-אלומה סגורה ביחס להכפלה בחתכים של $\mathcal{O}$. זה מיד.

2. <u>הומומורפיזמים של קדם-אלומות של מודולים. קטגוריה של קדם-אלומות ושל אלומות של מודולים.</u>

<u>הערה</u> הכל נאמר דלעיל תקף למרחב מחו"ג $(X,\tilde{\mathbb{Z}})$ כאשר $\mathbb{Z}$ אלומת החוגים המתקבלת על-ידי <u>האלומה</u> מקדם-אלומה קבועה $\mathbb{Z}(U)=\mathbb{Z}$.

אלומת מודולים מעל $\tilde{\mathbb{Z}}$ היא בפשטות אלומת החבורות האבליות.

דוגמאות מחוץ לגאומטריה אלגברית:

• $V \xrightarrow{f} X$ אגד וקטורים (העתקת מרחבים טופולוגיים + מבנה של מרחב וקטורי על כל סיב $V_x := f^{-1}(x)$.

נגדיר לכל $U \in X$ $M(U)=\{s:U\to V \mid f\circ s = id_U\}$. זאת אלומת מודולים מעל $\mathcal{O}$ - אלומת הפונקציות הרציפות על X.

• יהי $(X,\mathcal{O})$ מרחב מחו"ג. נגדיר את קדם-אלומה

$$\mathcal{O}^*(U)=\{\text{איברים הפיכים ב-}\ \mathcal{O}(U)\}$$

זאת אלומה של חבורות אבליות ביחס לכפל.

הומומורפיזם של קדם-אלומות מודולים מוגדר כהעתקת קדם-אלומות השומרת על פעולות חיבור וכפל בחתך של $\mathcal{O}$.

גרעין וקו-גרעין:

• אם $f: M\to N$ הומומורפיזם מודולים מעל חוג A, גרעין של f, $Ker(f) = \{m \mid f(m)=0\}$ הוא מודול מעל A גם כן. קו-גרעין, $Coker(f)$ מוגדר כמנה של N מודולו התמונה של f.

• למה: יהיו M,N קדם-אלומות מודולים מעל $(X,\mathcal{O})$. אזי

$$U \mapsto Ker(M(U)\to N(U))$$
$$U \mapsto Coker(M(U)\to N(U))$$

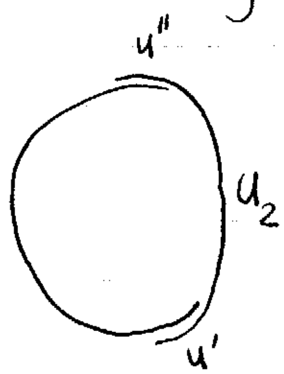
קדם-אלומות מודולים.

יתר על כן, אם M,N אלומות, אז $Ker(f)$ אלומה. (זה לא נכון לגבי $Coker(f)$).

דוגמא $X=S^1$ מעגל, $M=\tilde{\mathbb{Z}}$, $N=\mathbb{C}$ -אלומות הפונקציות הרציפות על S^1,

$$f:\tilde{\mathbb{Z}}\to \mathbb{C}$$

מתאימה לכל חתך (קבוע) של $\tilde{\mathbb{Z}}$ את הפונקציה הקבועה המתאימה. קדם-אלומה $\mathrm{Coker}(f)$ לא אלומה: יהיו U_1,U_2 כמו בתמונה



$$U_1\cap U_2 = U'\cup U''$$

יהיו f_1,f_2 שתי פונקציות רציפות על U_1 ועל U_2 בהתאמה, כך ש- $f_1|_{U'}=f_2|_{U'}$ ואילו $f_1|_{U''}=f_2|_{U''}+1$.

תמונות של f_1 ושל f_2 ~~מתאימות~~ ב- $\mathrm{Coker}(f)$ מתאימות על החיתוכים, אך לא ניתן להדביק אותן.

הגדרה יהי $f:M\to N$ הומומורפיזם של אלומות של מודולים מגדירים $\mathrm{Ker}(f)$ כמו קודם, ואילו את $\mathrm{Coker}(f)$ מגדירים כהלמה של $\mathrm{Coker}(f)$ המוגדר כקדם-אלומה.

למה (תכונה אוניברסלית של Coker)
יהי $f:M\to N$ הומו' של אלומות מודולים, $g:N\to N'$ עוד הומו'. אם ההרכבה $g\circ f$ שווה ל-0, קיים ויחיד הומו' $\bar{g}:\mathrm{Coker}(f)\to N'$ כך ש- g מתפרק

$$N\xrightarrow{p}\mathrm{Coker}(f)\xrightarrow{\bar{g}}N'$$

<u>הוכחה</u>

1. טענה זו טריוויאלית עבור מודולים מעל חוג: בהמשך על איזומורפיזם. באותה מידה היא נכונה בעולם קדם-אלומות.

2. כדי להסיק מכך את הטענה עבור אלומות, יש להשתמש בתכונה אוניברסאלית של ההאלמה.

<u>אלומות מודולים על $Spec(A)$.</u>

נזכיר כי $Spec(A)$ הוא מרחב מתויג עם אלומות החוגים $\mathcal{O}$ המוגדרת על-ידי התכונה

$$\mathcal{O}(D(f)) = A_f.$$

נבנה עתה הרבה אלומות מודולים על $Spec(A)$ בדרך דומה. יהי M מודול מעל A. נגדיר אלומת מודולים $\tilde{M}$ כך ש-

$$M(D(f)) = M_f$$

כאשר M_f מוגדר כקבוצה של זוגות $\{m/f^n\}$ מודולו יחס שקילות $m'/f^{n'} \sim m/f^n \iff f^N(f^{n'}m - f^n m')=0$ ופעולות רגילות.

~~משפט~~

<u>הגדרה</u> תהי $(X,\mathcal{O})$ סכימה. אלומת $\mathcal{O}$-מודולים M נקראת אלומה קוואזי-קוהרנטית (quasi-coherent) אם אחד משני התנאים השקולים הבאים מתקיים:

(1) קיים כיסוי פתוח של $(X,\mathcal{O})$ על-ידי סכמות אפיניות $(Spec(A),\mathcal{O})$ כך שצמצום של M עליה הוא איזומורפי לאלומה המוגדרת מעלה.

(2) לכל תת-קבוצה פתוחה אפינית הצמצום של M איזומורפי לאלומות המודולים כזאת.

אנחנו מבינים להוכיח שקילות של התכונות (1) ו-(2).
לפני כן – נעשה עבודת הכנה.

<u>למה</u> תהי

$$A \xrightarrow{d} B \xrightarrow{d} C \qquad (\star)$$

סדרה של אלומות של חבורות אבליות על מרחב טופולוגי X המקיימות $d^2=0$.
אז' היא מדויקת ב-B ($\mathrm{Ker}\, d = \mathrm{Im}\, d$) אם ורק אם היא משרה סדרה מדויקת של חבורות אבליות

$$A_x \longrightarrow B_x \longrightarrow C_x \qquad (\star_x)$$

של גבעולים לכל $x \in X$.

<u>הוכחה</u> לפי ההגדרה, הסדרה $\star$ מדויקת אם לכל $U \subseteq X$ ולכל $b \in B(U)$ מתקיים:

$$d(b)=0 \Leftrightarrow \exists\{U=\cup V_i\},\ \exists a_i \in A(V_i) \mid da_i = b|_{V_i}$$

השקילות של טענה זו לדיוק של כל סדרות $(\star_x)$ - תרגיל.

<u>משפט</u> יהי $X=Spec(A)$, M,N - מודולים מעל A, $\tilde M, \tilde N$ אלומות המודולים מתאימות. אז'

$$Hom_{\mathcal{O}}(\tilde M, \tilde N) = Hom_A(M,N)$$

<u>הוכחה</u>
כל $\mathcal{O}$-הומו' $f:\tilde M \to \tilde N$ משרה הומו' של חתכים גלובליים, ואילו $\tilde M(X)=M$, $\tilde N(X)=N$, כך ש קיימת העתקה

$$Hom_{\mathcal{O}}(\tilde M, \tilde N) \to Hom_A(M,N)$$

העתקה זאת על כי כל הומו' $\varphi: M \to N$ נותן, על-ידי לוקליזציה, הומו' של A_f-מודולים $\varphi_f: M_f \to N_f$ ולבסוף, הומומורפיזם של אלומות $\tilde M \to \tilde N$.

נשאר רק לציין כי הומומורפיזם $\varphi: M \to N$ ניתן להשלים באופן יחיד לדיאגרמה קומוטטיבית

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & N \arrow[d] \\ M_f \arrow[r, "?"] & N_f \end{tikzcd}$$

כך ש- ? יהיה הומומורפיזם של A_f-מודולים.

ועתה נוכיח את השקילות של (1) ו- (2) בהגדרת קוואזי-קוהרנטיות. היא נובעת מהמשפט הבא:

<u>משפט</u>: תהי F אלומת מודולים על $Spec(A)$. יהיו $f_1,\dots,f_n \in A$ כך ש- $(f_1,\dots,f_n)=1$. נניח כי הצמצום $F|_{D(f_i)}$ איזומורפי ל $\tilde{M}_i$ כאשר M_i מודול מעל A_{f_i}. אז גם F איזומורפי לאלומה בצורה $\tilde{M}$, כאשר M מודול מעל A.

<u>הוכחה</u>

אנחנו יודעים מה צריך להיות M: $M = F(Spec(A))$. הבעיה היא רק לבנות איזומורפיזם של אלומות.

הרכבה
$$M = F(Spec(A)) \longrightarrow F(D(f))$$
היא הומומורפיזם מ- A-מודול ל A_f-מודול. לכן, היא באופן אוטומטי משרה הומומורפיזם
$$M_f \longrightarrow F(D(f)).$$
זה אומר כי הומומורפיזם של אלומות
$$\tilde{M} \longrightarrow F$$
מושרה באופן אוטומטי. נשאר להוכיח כי הוא איזומורפיזם.

נזכיר כי M חתכים גלובליים של F, כך שהסדרה

$$0 \to M \to \prod_i M_i \rightrightarrows \prod_{i,j} M_{ij}$$

מדויקת כאשר $M_{ij} = (M_i)_{f_j} \approx (M_j)_{f_i}$.

לכן הסדרה של אלומות

$$0 \to \tilde{M} \to \prod \tilde{\tilde{M}}_i \rightrightarrows \prod \tilde{\tilde{M}}_{ij}$$

מדויקת (הבהרה: כאן M_i, M_{ij} מפורשים כ-A-מודולים, ולכן $\tilde{\tilde{M}}_i$ היא אלומה על $Spec(A)$, ולא על $Spec(A_f)$).

נבנה סדרה דומה עבור F במקום $\tilde{M}$. לפי הנתון, $F|_{D(f)} \approx \tilde{M}_i$; הקשר בין $\tilde{M}_i$ לבין $\tilde{\tilde{M}}_i$ הוא כדלקמן:

$$\tilde{\tilde{M}}_i(U) = \tilde{M}_i(U \cap D(f))$$

לכן, המומ' $F \to \prod \tilde{\tilde{M}}_i$ מוגדר באופן טבעי.

נשאר לוודא כי הסדרה

$$0 \to F \to \prod_i \tilde{\tilde{M}}_i \rightrightarrows \prod_{i,j} \tilde{\tilde{M}}_{ij}$$

מדויקת. לפי הלמה, מספיק לוודא כי היא משרה סדרה מדויקת אחרי שנעבור לגבעולים:

$$0 \to F_x \to \prod_i (\tilde{\tilde{M}}_i)_x \rightrightarrows \prod_{i,j} (\tilde{\tilde{M}}_{ij})_x$$

אבל חישוב גבעולים בפועל במקרה זה:

$(\tilde{\tilde{M}}_i)_x = (M_i)_x \approx F_x$ אם $x \in D(f)$

$= 0$ אם $x \notin D(f)$

לכן, נשאר לבדוק כי הסדרה

$$0 \to A \to \prod_{i\in I} A_i \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} A_{ij} \qquad (\star\star)$$

מדויקת, כאשר $A_i = A_{ij} = A$ וכל החצים הם זהויות.
אך זה ברור בהחלט.

<u>תרגילים</u> – להשלים את ההוכחה שניתנה:

1) הוכיחו כי $(\widetilde{M})_x = M_x$.

2) הוכיחו כי אם M מודול מעל A_f, $\widetilde{M}$ אלומה על $\mathrm{Spec}(A_f)$ מתאימה ואילו $\widetilde{\widetilde{M}}$ אלומה על $\mathrm{Spec}(A)$ המתאימה ל-M כשמסתכלים עליו כעל A-מודול, אז

$$\widetilde{\widetilde{M}}(U) = \widetilde{M}(U \cap D(f))$$

3) בדקו כי הסדרה $(\star\star)$ אכן מדויקת.

אנחנו הוכחנו כי הקטגוריה של אלומות קוואזי-קוהרנטיות על סכימה אפינית $\mathrm{Spec}(A)$ שקולה לקטגוריה של מודולים מעל החוג A.