גאומטריה אלגברית - 12

פולינום של הילברט

$A=\bigoplus_{i\geq 0} A_i$, $A_0=k$ שדה.

הנחות נוספות:

- $\dim_k A_1<\infty$
- A_1 פורש את A כאלגברה מעל k.

אם $A_1=\mathrm{Span}\{x_0,\dots,x_n\}$ אז ההומו' חוגים מדורגים

$$k[x_0,\dots,x_n]\to A$$

הוא הומו' על וזה מגדיר העתקה

$$\mathrm{Proj}(A)\hookrightarrow \mathbb{P}^n_k$$

שהוא שיכון סגור (לא הגדרנו עדין, אך זה כולל זיהוי של $\mathrm{Proj}(A)$ כתת-קבוצה סגורה במרחב טופולוגי $\mathbb{P}^n_k$).

נעסוק היום בהתנהגות של פונקציה $n\mapsto d_A(n)=\dim A_n$.

<u>משפט</u> עבור $n\gg 0$ מתקיים

$$d_A(n)=h_A(n)$$

כאשר h_A פולינום עם מקדמים רציונליים (ועם ערכים שלמים עבור ארגומנט שלם).

נוח יותר להוכיח משפט כללי יותר, עבור מודולים מדורגים נוצרים סופית מעל A.

<u>הגדרה</u> 1. A-מודול M נקרא מודול מדורג אם $M=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$, ואילו $A_i M_j\subseteq M_{i+j}$.

2. הומו' $f:M\to N$ של מודולים מדורגים הוא הומו' של מודולים מעל A המקיים $f(M_i)\subseteq N_i$.

<u>משפט</u> יהי M מודול מדורג נוצר סופית מעל חוג מדורג A
המקיים את התנאים הנזכרים מעלה. אזי

$$\dim M_n = h_M(n)$$

עבור $n > N$, ועבור פולינום מסוים h_M.

<u>הוכחה</u> אינדוקציה לפי $\dim A_1 = d$.

$d=0$. אזי $A = k$, M מרחב וקטורי בעל מימד סופי, לכן
$M_n = 0$ עבור n מספיק גדול.

צעד אינדוקציה נניח כי המשפט נכון עבור A: $\dim A_1 < d$.
יהי $\dim A_1 = d$, $0 \neq a \in A_1$.

נגדיר מודול $M[1]$ ע"י הנוסחא $M[1]_k = M_{k+1}$ (רק
הדירוג השתנה). הכפלה ב־ a נותנת הומו׳

$$M \xrightarrow{\cdot a} M[1]$$

נתבונן בסדרה

$$0 \to K_k \to M_k \xrightarrow{\cdot a} M_{k+1} \to C_{k+1} \to 0$$

כאשר K גרעין ואילו C קו-גרעין (=מנה מודולו תמונה)
של ההכפלה ב a. הסכום

$$K = \oplus K_i$$

מהווה מודול מדורג מעל $A/(a)$, ואילו

$$C = \oplus C_i$$

גם הוא מודול מדורג מעל $A/(a)$.
לא קשה לבדוק כי שניהם נוצרים סופית (ראה מאוחר יותר).
עתה

$$d_M(n+1) - d_M(n) = d_C(n+1) - d_K(n) = \bar{h}(n)$$

פולינום עבור n גדול מספיק.

עתה החשבון נובע מכך ש

$$\sum_{i=0}^{n} i^{k}$$

הוא פולינום של n בעל מעלה $k+1$.

נזכיר שמודול K ו- C נוצרים סופית מעל $A/(a)$. מודול מעל $A/(a)$ הוא גם מודול מעל A ויוצרין מעל A הם בו-זמנית יוצרין מעל $A/(a)$. התנאי A נוצר סופית $\Leftarrow$ חוג Noether (משפט הבסיס). לכן, כל מודול נוצר סופית הוא מודול של Noether. לכן, כל תת-מודול של M (למשל K) וכל מנה של M (למשל, C) הם נוצרים סופית.

<u>הגדרה</u> יהי $X=\mathrm{Proj}(A)$ כאשר A כמו קודם.
אז

$$\dim X = \deg h_A(n)$$

- מימד של הספקטרום הפרויקטיבי
(בינתיים אנו לא יודעים כי $\dim X$ זהה למימד שהגדרנו בתחילת הקורס עבור חוגים קומוטטיביים).

<u>למה</u> יהי $h\in \mathbb{Q}[t]$ פולינום המקיים את התכונה $h(n)\in\mathbb{Z}$ עבור $n\in\mathbb{Z}$ (מספיק לדרוש רק עבור n גדול מספיק). אז

$$h(x)=\sum a_i \frac{x(x-1)\dots(x-i+1)}{i!} \quad \text{עם} \quad a_i\in\mathbb{Z}$$

<u>הוכחה</u> הפולינומים $X^{(i)}=\frac{1}{i!}x(x-1)\dots(x-i+1)$ מהווים בסיס של מרחב וקטורי $k[t]$ עבור כל שדה k: $\mathrm{char}\, k=0$. את הטענה הזו אפשר לבדוק באינדוקציה, כשהטענה עבור n היא כי $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ פורשים את מרחב הפולינומים בעלי מעלה $\leq n$.
עתה $h(x)=\sum a_i X^{(i)}$ ועלינו להוכיח כי כל a_i שלמים.

נניח כי $h(n)$ שלם עבור כל סדרת שלמים. אז השלמות של a_i מוכחת ע"י הצבה $x=0$, $x=1$, ...

$$h(i) = a_i + \sum_{j=0}^{i-1} a_j \frac{i(i-1)\cdots(i-j+1)}{j!}$$

במקרה כללי נגדיר $\tilde{h}(n) = h(n-1)$ ונשווה את המקדמים של a_i, $\tilde{a}_i$, h, $\tilde{h}$

$$\tilde{h}(n) = \sum a_i \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-i)}{i!} = \sum \tilde{a}_i \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}$$

אם הערכים של $h(n)$ שלמים עבור $n \geq N$, הערכים של

$$\tilde{h}(n) = h(n+N)$$

שלמים עבור כל סדרה כך ש

$$\tilde{f}(x) = \sum \tilde{a}_i \frac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!}$$

עם $\tilde{a}_i$ שלמים. לכן,

$$h(x) = \sum \tilde{a}_i \frac{(x-N)(x-N-1)\cdots(x-N-i-1)}{i!}$$

הביטוי $\frac{(x-N)\cdots(x-N-i-1)}{i!}$ מקבל ערכים שלמים עבור כל $x \in \mathbb{Z}$, לכן זה נכון גם עבור h.

סוף ההוכחה.

<u>הגדרה</u>. המקדם הראשי של h_A, l.c., מספר שלם e:

$$h(n) = \frac{e}{(\dim X)!} n^{\dim X} + \dots$$

נקרא דרגה של $\text{Proj}(A)$, $\deg(X)$.

• $h_A(0) = \chi(\text{Proj}(A))$ - אופיין של Euler.

תכונות ראשונות של $\dim X$, $\deg X$.

כאן $X=\operatorname{Proj}(A)$, A כמו קודם.

משפט הטענות הבאות שקולות:

1) $\dim X=-1$
2) $X=\emptyset$
3) $A_1 \subset N(A)$ -כל איברי A_1 נילפוטנטיים.

הוכחה $\dim=-1 \Leftrightarrow h\equiv 0 \Leftrightarrow R_n=0$ עבור $N<n$.

לכן, $(3)\Leftarrow(1)$.

$(2)\Leftarrow(3)$ ברור כי כל אידיאל ראשוני מכיל את הנילרדיקל A_+.

$(3)\Leftarrow(2)$: $X=\cup \operatorname{Spec} A_{(f)}$ כאשר $f\in A_+$; לכן, $\emptyset=\operatorname{Spec} A_{(f)}$

עבור כל $f\in A_1$ $\Leftarrow$ $(A_f)_0=A_{(f)}=0$ לכן $1=0$ ב-A_f לכן $A_f=0$

לכן f נילפוטנטי.

$(1)\Leftarrow(3)$ ברור.

למה A חוג מדורג, $f_i\in A_+$. הטענות הבאות שקולות:

(1) $X=\cup D_+(f_i)$
(2) לכל $x\in A_+$ קיים n: $x^n\in(f_1,\dots,f_n)$

הוכחה: תרגיל

משפט התנאים הבאים שקולים:

1) $\dim \operatorname{Proj}(A)=0$
2) $\operatorname{Proj}(A)$ קבוצה סופית.

במקרים הנ"ל הטופולוגיה על $\operatorname{Proj}(A)$ בדידה ומתקיים

$$\operatorname{Proj}(A)\cong \operatorname{Spec} \mathcal{O}(\operatorname{Proj}(A))$$

-ספקטרום של חוג הפונקציות הרגולריות על כל $\operatorname{Proj}(A)$.

<u>הוכחה</u>

נניח $\dim X=0$. אזי h_A קבוע, כך ש $\dim A_n = d$ עבור $N < n$.

יהי $f \in A_1$. נוכיח כי $\dim A_{(f)} < \infty$.
ה-k-אלגברה $A_{(f)}$ נפרשת ע"י איברים x/f, $x \in A_1$, מעל $k=A_0$.
אילו כל הקלגברות $k[\frac{x}{f}] \subset A_{(f)}$ היו בעלות מימד סופי, גם $A_{(f)}$ היתה בעלת מימד סופי. לכן, אם $\dim A_{(f)}=\infty$, קיים $x \in A_1$: החזקות $(x/f)^n$ בלתי-תלויות לינארית ל- $n=0,1,\dots$. זה גורר כי לכל m האיברים

$$x^0 f^m,\ x^1 f^{m-1},\ \dots,\ x^m f^0$$

בלתי-תלויים לינארית ב-A_m, ז.א. כי $\dim A_m \geq m+1$. סתירה.

מסקנה: $\operatorname{Spec} A_{(f)}$ קבוצה בדידה סופית;
כיוון ש- $\operatorname{Proj}(X)$ הוא איחוד של קבוצה סופית של $\operatorname{Spec} A_{(f)}$ (f עוברים של A_1), מקבלים כי $\operatorname{Proj}(X)$ קבוצה בדידה סופית.
לכן,

$$\operatorname{Proj}(A) = \operatorname{Spec}\Big(\prod_{x \in \operatorname{Proj}(X)} \mathcal{O}_x\Big)$$

וזה נותן את הנדרש.

~~תרגיל הכללי: נניח $\dim X>0$. זה אומר כי $\dim A_n \to \infty$. נחפש איבר $f \in A_1$ כך ש $\dim A_{(f)}=\infty$.~~

נתבונן טוב יותר במקרה $\operatorname{Proj}(A)$ הוא קבוצה סופית של נקודות. נבדוק כי במקרה זה קיים $f \in A_1$ כך ש- ~~$\operatorname{Proj}(A)=\operatorname{Spec}A_{(f)}$~~ $\operatorname{Proj}(A) = D_+(f)$. נניח את השלילה. זה אומר כי לכל $f \in A_1$ קיים $x \in \operatorname{Proj}(A)$: $x \notin D_+(f)$. נבחר ב-$\operatorname{Proj}(A)$ קבוצה מינימלית Y עם את התכונה: לכל $f \in A_1$ קיים $x \in Y$: $x \notin D_+(f)$. מינימליות של Y אומרת כי לכל $x \in Y$ קיים $f_x \in A_1$: $D_+(f_x)=Y-\{x\}$. אזי

$$g_x = \prod_{y \in Y-\{x\}} f_y$$

מתאפס על כל נקודה פרט ל y, רק ש-

$$\sum_{y\in Y} g_y$$

לא מתאפס באף נקודה של Y. סתירה.

זה מוכיח כי אם $Proj(A)$ קבוצה סופית, אז קיים איבר $f\in A_1$:

$$Proj(A) = D_+(f)$$

המרחב הטופולוגי $D_+(f)$ הוא ספקטרום של החוג $A_{(f)}$.
כיוון ש A אלגברה נוצרת סופית על-ידי איברים בעלי דרגה 1,
גם כן $A_{(f)}$ אלגברה נוצרת סופית – היא נוצרת על-ידי
x/f כאשר x פורשים את A. לפי ה-Nullstellensatz
אוסף האידיאלים המקסימליים צפוף ב- $Spec\, A_{(f)}$, לכן,
כל האידיאלים הראשוניים ב- $A_{(f)}$ מקסימליים.

נוכיח כי $\dim_k A_{(f)} < \infty$. מתקיים $A_{(f)} = \prod A_x$
כאשר A_x חוג מקומי של גבעולים של $A_{(f)}$ ב- $x \in Spec(A_{(f)})$.
האידיאל המקסימלי נילפוטנטי + נוצר סופית $\Leftarrow$ בעל מימד סופי מעל
שדה מנה A_x/p_x שהוא סופי מעל k לפי Nullstellensatz.

לכן, הצלחנו להסיק מההנחה $|Proj(A)| < \infty$
את התכונה $\dim X = 0$.
לכן, אם $\dim X > 0$, $Proj(A)$ אינסופי.

תרגיל: יהי A חוג קומוטטיבי, $R = A[x]$ חוג מדורג
כאשר הדרגה של x שווה ל-1. תארו את $Proj(R)$.

משפט Besout

A חוג מדורג כמו קודם, $h_A(n)$ פולינום של הילברט.

נגדיר

$$F_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_A(n)\, t^n$$

משפט

1. הפונקציה $F_A(t)$ רציונלית
2. $\dim Proj(A)+1$ הוא סדר של קוטב של F ב- $t=1$.
3. $\chi(Proj(A)) = -\operatorname{Res}_{t=1} \frac{F_A(t)}{t}\,dt$
4. $\deg Proj\, R = \lim_{t \to 1} (t-1)^{\dim Proj\, A+1} F_A(t)$

הוכחה

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k t^n = \left(t\frac{d}{dt}\right) \sum n^{k-1} t^n = \left(t\frac{d}{dt}\right)^k \frac{1}{1-t}$$

לכן

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_A(n)\, t^n = h_A\left(t\frac{d}{dt}\right) \frac{1}{1-t}$$

נחשב את האיבר הראשי של $\left(t\frac{d}{dt}\right)^k \frac{1}{1-t}$.

$$t\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right) = \frac{t}{(1-t)^2} =$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right) = \frac{1}{(1-t)^2}$$

$$= \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{1-t}\ ;$$

נוכיח לפי אינדוקציה כי

$$\left(t\frac{d}{dt}\right)^k\left(\frac{1}{1-t}\right) = \frac{k!}{(1-t)^{k+1}} + \{\text{איברים בעלי חזקה } > -k-1\}$$

זה נכון עבור $k=0$; מעבר ל- $k+1$ נותן

$$\left(t\frac{d}{dt}\right)\left(t\frac{d}{dt}\right)^k\left(\frac{1}{1-t}\right) = t\frac{d}{dt}\frac{k!}{(1-t)^{k+1}} + \dots =$$

$$= t\left(\frac{(k+1)!}{(1-t)^{k+2}} + \dots\right) = \frac{(k+1)!}{(1-t)^{k+2}} + \frac{(k+1)!}{(1-t)^{k+1}} + \dots$$

וזה נותן את התוצאה שציינו.

עכשיו אנו מקבלים: אם $d=\deg h_A$, הקוטב ב- $t=1$ בעל סדר $d+1$.

הדרגה של $\mathrm{Proj}(A)$ היא, לפי ההגדרה, $d!$ כפול המקדם הראשי של h_A שזה המקדם של $(t-1)^{-d-1}$ בפיתוח Laurent של $F_A(t)$.

נשאר להוכיח את הנוסחה עבור $\chi(\mathrm{Proj} A)$.

$$\chi(\mathrm{Proj} A) = h_A(0).$$

עתה

$$h_A\left(t\frac{d}{dt}\right) = h_A(0) + t\frac{d}{dt}h'_A\left(t\frac{d}{dt}\right)$$

לכן

$$\frac{F(t)}{t}dt = -\frac{h_A(0)}{t(t-1)}dt + \frac{d}{dt}h'\left(t\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{1}{1-t}\right)dt$$

$$\mathrm{Res}\,\frac{F(t)}{t}dt = -h_A(0) + 0$$

מה שמוכיח את המשפט.

דוגמא

f הומוגני בעל דרגה n, לא מחלק האפס ב-A.

$$h_{A/(f)}(n) = h_A(n) - h_A(n-d)$$

$$F_{A/(f)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \big(h(n) - h(n-d)\big) t^n = (1-t^d) F_A(t) + P(t)$$

כאשר $P(t)$ פולינום

לכן,

$$\dim \operatorname{Proj}(A/(f)) = \dim \operatorname{Proj} A - 1$$
$$\chi(\operatorname{Proj} A/(f)) = \chi(\operatorname{Proj} A) - h_A(-d)$$

$$\deg \operatorname{Proj} A/f = d \deg \operatorname{Proj} A .$$

<u>מסקנה:</u>

$f_1, \dots, f_s \in A = k[x_0, \dots, x_n]$ הומוגניים $\deg f_i = d_i$

אזי, אם