גאומטריה אלגברית - 11

שקילות דו-רציונלית

מתי $X=Spec(A)$ ו- $Y=Spec(B)$ ניתן להדביק?

משפט 1. יהיו A,B תחומי שלמות. נניח קיימות ב- $Spec(A)$ ו- $Spec(B)$ תת-קבוצות פתוחות לא ריקות איזומורפיות. אז: שדות המנות של A ושל B איזומורפיים.

2. יהיו A,B שתי אלגברות בעלות טיפוס סופי מעל $\mathbb{Z}$ או מעל שדה K, בעלות שדה מנות L משותף. אז: קיימות ב- $Spec(A)$ וב- $Spec(B)$ קבוצות פתוחות לא ריקות איזומורפיות.

הוכחה 1. $U\subset X$, $V\subset Y$, $U\approx V$. אידיאל האפס מתאים לנקודה הכללית (generic point) בכל אחד מהקבוצות U ו-V. היא יחידה $\Leftarrow$ איזומורפיזם בין U ל-V מעביר את הנקודה הכללית לנקודה הכללית. אז: $A_{(0)}\approx B_{(0)}$.

2. אם A נוצרת ע"י $a_1,\dots,a_n\in L$ ואילו B נוצרת ע"י $b_1,\dots,b_m\in L$ אז תת-החוגים של L $A[b_1,\dots,b_m]$ ו- $B[a_1,\dots,a_n]$ איזומורפיים.

אם נדע כי ל-A ו-ל $A[b]$, $b\in L$, יש תת-קבוצות פתוחות משותפות, נסיק את הטענה הכללית באינדוקציה כי הספקטרא אי-פריקים.

ובכן, יהי $b=x/y$, כאשר $x,y\in A$. אז:
$$A_y \to A[\tfrac{x}{y}]_y$$
איזומורפיזם של חוגים לכן $D(f)$ בכל אחד מהספקטרא מגדיר את אותה קבוצה פתוחה.

הגדרה X,Y סכימות שקולות דו-רציונלית
(Birationally equivalent)
אם קיימת קבוצות פתוחות צפופות $U\subset X$, $V\subset Y$, איזומורפית.

הערות: 1) אם X,Y אי-פריקות, פתוחה לא ריקה $\Leftarrow$ צפופה.
2) שקילות דו-רציונלית מגדירה התאמה חח"ע בין מרכיבי האי-פריקות

(3) פונקציות רגולריות על קבוצה פתוחה צפופה U מפורשות כפונקציות רציונליות על X. לכן, סכימות שקולות בי-רציונלית בעלות אותו מאגר של פונקציות רציונליות – זה מקור השם.

<u>דוגמאות</u>

1. $X=\mathrm{Spec}\,(k[t])$, $Y=\mathrm{Spec}\,k[x,y]/(x^2+y^2-1)$ – ישר שקול בי-רציונלית למעגל ($\mathrm{char}\,k\neq 2$).

הנוסחאות $x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $y=\frac{2t}{t^2+1}$, $t=\frac{y}{1-x}$,

מגדירות איזומורפיזם בין $D(t^2+1)$ לבין $D(1-x)$ ביריעות המתאימות.

2. $\mathbb{A}^1_k$ ו- $\mathrm{Spec}\,k[x,y]/(x^3+y^3-1)$ לא שקולים בי-רציונלית. כדי להוכיח את זה, מספיק להראות כי אין פולינומים $f,g,h\in k[t]$ לא קבועים המקיימים

$$f^3+g^3=h^3$$

(תרגיל).

<u>מורפיזמים של סכימות</u>

אנחנו כבר יודעים מה הוא איזומורפיזם של סכימות. גם כן השתמשנו (או יותר נכון, הרגשנו צורך) במושג מורפיזם סכימות כשדיברנו על הניפוח. הגיע זמן.

<u>הגדרה</u> יהיו $(X,\mathcal{O}_X)$ ו-$(Y,\mathcal{O}_Y)$ מרחבים מחוגים. מורפיזם $f:(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ הוא אוסף נתונים:

א. העתקה רציפה $f:X\to Y$

ב. הומומ' מוגדר לכל $V\subseteq Y$ קבוצה פתוחה

$$f^*_V:\ \mathcal{O}_Y(V)\longrightarrow\mathcal{O}_X(f^{-1}V)$$

אוסף ההומומורפיזמים f^*_V חייב להיות מתואם עם הצמצומים.

מורפיזם של סכימות יוגדר כמורפיזם של המרחבים המחוגים המתאימים המקיים תכונה נוספת אחת: מקומיות.
נזכיר כי אם $(X,\mathcal{O}_X)$ מרחב מחוג, לכל נקודה $x\in X$ מתאימים חוג $\mathcal{O}_x$,

$$\mathcal{O}_x = \operatorname{colim}_{U\ni x} \mathcal{O}_X(U)$$

של גבעולים של $\mathcal{O}$. אם $f:(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ מורפיזם המרחבים המחוגים, ואם $x\in X$, $y=f(x)\in Y$, מוגדר הומומ'

$$\mathcal{O}_y = \operatorname{colim}_{V\ni y}\mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \operatorname{colim}_{U\ni x}\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_x .$$

נחזור לסכימות. אם $(X,\mathcal{O}_X)$ סכימה, $x\in X$, קיימת סביבה אפינית $\mathrm{Spec}(A)$ של $X\ni x$ $\Leftarrow$ $\mathcal{O}_x$ הוא חוג מקומי.

<u>הגדרה</u> מורפיזם של סכימות $f:(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ הוא מורפיזם המרחבים המחוגים המקיימים את התכונה:

$$\boxed{\forall x\in X,\ y=f(x)\qquad f^*:\mathcal{O}_y\longrightarrow\mathcal{O}_x \ \text{ is local}}$$

(הומומ' חוגים מקומיים נקרא מקומי אם הוא מעביר איברים לא הפיכים לאיברים לא הפיכים).

<u>דוגמאות</u> 1. יהי $f:A\to B$ הומומ' של חוגים קומוטטיביים. הוא מגדיר, כידוע, העתקה רציפה $f^a: Y\to X$ כאשר $X=\mathrm{Spec}(A)$, $Y=\mathrm{Spec}(B)$.
אם $a\in A$, מוגדר הומומ' $A_a\to B_{f(a)}$ והוא נותן את $(f^a)^*$ הנדרש על הקבוצות הפתוחות העיקריות.
נבדוק את התכונה הנדרשת:

אם $\mathfrak{p}\in Spec(B)$, $f^a(\mathfrak{p}) = f^{-1}(\mathfrak{p}) =: \mathfrak{q}$. ההומומורפיזם $A_\mathfrak{q} \to B_\mathfrak{p}$ מעביר, לפי ההגדרה, את איברי $\mathfrak{q}$ לאיברי $\mathfrak{p}$, לכן התכונה מתקיימת.

<u>תרגיל</u> הוכח כי כל מורפיזם של סכימות אפיניות ניתן באופן יחיד על-ידי הומומ' של החוגים המתאימים (בכיוון הנגדי).

במציאות, משפט יותר כללי מתקיים:

<u>משפט</u> מורפיזם סכימות $f:(X,\mathcal{O}_X)\to Spec(A)$ ניתן באופן יחיד על-ידי הומומ' חוגים
$$A\to\mathcal{O}_X(X)$$
של הפונקציות הגלובליות.

<u>הוכחה</u>: יש לכסות את $(X,\mathcal{O}_X)$ על-ידי קבוצות פתוחות אפיניות — ולהשתמש בתרגיל הקודם. הפרטים - תרגיל.

ספקטרא פרויקטיביים

עתה נכליל באופן משמעותי את הבניה של $\mathbb{P}^n_k$.

חוגים מדורגים

חוג A מדורג אם $A=\bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ כחבורה אבלית, ואילו
$$A_m\cdot A_n \subseteq A_{m+n}.$$

<u>דוגמאות</u>: $A=k[x_1,\dots,x_n]$ כאשר A_i אוסף הפולינומים ההומוגניים בעלי מעלה i.

$$A=k[x_1,\dots,x_n]/(f_1,\dots,f_m)$$
כאשר כל f_i פולינומים הומוגניים (יתכן של מעלות שונות).

הרנ׳ג A_0 הוא חוג בעצמו, ואילו $A_+ = \bigoplus_{i>0} A_i$ הוא אידיאל ב־ A.

<u>הגדרה</u> $\mathrm{Proj}(A)$ הוא קבוצת האידיאלים הראשוניים ההומוגניים ב־ A הלא מכילים את A_+. הטופולוגיה על $\mathrm{Proj}(A)$ מושרת ע״י השיכון

$$\mathrm{Proj}(A) \subset \mathrm{Spec}(A).$$

עתה הגדרנו $\mathrm{Proj}(A)$ כמרחב טופולוגי. בהמשך נגדיר את אלומת המבנה ונוכיח שקיבלנו סכימה.
אך בינתיים ננסה להשוות את מה שבנינו עם תמונה קלאסית.

דוגמא טיפוסית של חוג מדורג היא

$$A = \bigoplus k[x_0,\dots,x_n] / (f_1,\dots,f_m)$$

כאשר f_i פולינומים הומוגניים. נסתפק רק באידיאלים מכסימליים של $\mathrm{Proj}(A)$. הנקודות הסגורות ב־ $\mathrm{Spec}(A)$ מהצורה

$$(x_0-a_0,\dots,x_n-a_n) \qquad (\star)$$

- לא הומוגניים, לכן לא שייכים ל־ $\mathrm{Proj}(A)$. המקרה היחיד של אידיאל הומוגני מבין $(\star)$ הוא $a_0=\dots=a_n=0$
- אך אנו הסכמנו לא להחשיב את האידיאל $A_+=(x_0,\dots,x_n)$.

לכן, הנקודות הסגורות ב־ $\mathrm{Proj}(A)$ הם אידיאלים הנפרשים ע״י $a_i x_i - a_j x_j$ כאשר האפס $(a_0,\dots,a_n) \neq 0$.

[<u>תרגיל</u>: הוכח כי אידיאל כנ״ל הוא מכסימאלי מבין האידיאלים ההומוגניים ב־ $k[x_0,\dots,x_n]$]

במקרה כללי יותר, אידיאל $I \overset{=\mathrm{rad}(I)}{}$ ב־ $k[x_0,\dots,x_n]$ (k סגור אלגברית) הומוגני אם ורק אם $V(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ היא חרוט עם מרכז ב־ 0: $(a_0,\dots,a_n)\in V(I) \iff (\lambda a_0,\dots,\lambda a_n)\in V(I)$.

אלומת מבנה על $Proj(A)$.

נזכיר, $A=\bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$.

לכל $f\in A$ נגדיר $D_+(f)=D(f)\cap Proj(A)$.

למה יהי $f_i\in A_i$, $f=\sum f_i$.
אזי $D_+(f)=\bigcup D_+(f_i)$

הוכחה הלמה בעצם טוענת כי אידיאל ראשוני הומוגני מכיל f אמ"מ הוא מכיל כל f_i.

לכן רק מקרה f הומוגני יעניין אותנו.

יהי f הומוגני, בעל דרגה k. הלוקליזציה A_f היא חוג מדורג:

$$(A_f)_\ell=\left\{\frac{a}{f^n} : \deg a=\ell+nk\right\}$$

הדרך הקלה לבדוק את זה היא להציג A_f כחוג מנה $A[x]/(1-fx)$ ולהניח כי $\deg x=-k$.

הערה: A_f מדורג ע"י דרגות שלמות, ולא רק חיוביות.

הגדרה $A_{(f)}=(A_f)_0=\left\{\frac{a}{f^n} \,\middle|\, \deg a=nk\right\}$.

הערה: הפונקציות על $D(f)$ מהוות את החוג A_f. אך מעניינות אותנו רק פונקציות שערכם לא משתנה אם כל הקואורדינטות נכפיל באותו מספר $\lambda\neq 0$. לכן, עלינו לבחור רק את השברים בעלי דרגה 0.

משפט 1. יהיו $f,g\in A$ הומוגניים. אזי

$$D_+(f)\cap D_+(g)=D_+(fg)$$

2. קיימים הומאומורפיזמים $\psi_f: D_+(f)\xrightarrow{\sim} Spec(A_{(f)})$ המתואמים עם הצמצומים

$$\begin{array}{ccc} D_+(fg) & \xrightarrow{\psi_{fg}} & \operatorname{Spec}(A_{(fg)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_+(f) & \xrightarrow[\psi_f]{} & \operatorname{Spec}(A_{(f)}) \end{array}$$

<u>הוכחה</u> 1. $D(fg)=D(f)\cap D(g)$ $\Leftarrow$ $D_+(fg)=D_+(f)\cap D_+(g)$

2. נגדיר ψ_f כהרכבה

$$D_+(f)\longrightarrow D(f)\xrightarrow{\sim}\operatorname{Spec}A_f\longrightarrow\operatorname{Spec}A_{(f)}$$

כאשר העתקה הראשונה היא שיכון, ואילו האחרונה מושרת על-ידי $A_{(f)}\hookrightarrow A_f$.
ההרכבה היא העתקה רציפה. היא מעבירה אידיאל ראשוני הומוגני $\mathfrak p$ של A הלא מכיל את f לאידיאל ראשוני $A_f\cdot\mathfrak p\subseteq A_f$ קודם כל, ולאחר מכן לחיתוכו עם הרכיב ה-0:

$$\cancel{A_f\mathfrak p}.\ A_{(f)}\cap A_f\cdot\mathfrak p$$

לבסוף מקבלים כתוצאה את האידיאל

$$\left\{\frac{a}{f^n}\ \middle|\ a\in\mathfrak p,\ \deg a=n\cdot\deg f\right\}$$

התאמה זו חח"ע: אם $\mathfrak q$ אידיאל ראשוני ב- $A_{(f)}$ הוא מגדיר אידיאל $\mathfrak p\in D_+(f)$ כאשר $\mathfrak p$ נוצר על-ידי כל המחנים a עבור $\frac{a}{f^n}\in\mathfrak q$. במילים אחרות, $a\in A_n\cap\mathfrak p$ אם ורק אם

$$\frac{a^{\deg f}}{f^n}\in\cancel{\mathfrak p}\,\mathfrak q\ .$$

<u>למה</u> $\mathfrak p$ אכן אידיאל ב- A.
<u>הוכחה</u> יהי $d=\deg f$. אם $a^d/f^n\in\mathfrak q$ וגם $b^d/f^n\in\mathfrak q$
של

$$(a+b)^d/f^n\in\mathfrak q\ \Leftarrow\ (a+b)^{2d}/f^{2n}\in\mathfrak q\ .$$

השאר עוד יותר ברור.

נשאר לוודא כי ההרכבה היא העתקה פתוחה.

אך זה נובע מכך שהדיאגרמה

$$\begin{tikzcd} D_+(f) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(A_{(f)}) \\ D_+(fg) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{Spec}(A_{(fg)}) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

קומוטטיבית.

במסקנה מהמשפט, אנחנו מקבלים מבנה של סכימה על $\mathrm{Proj}(A)$:
ישנה אלומת מבנה על כל $D_+(f) \approx \mathrm{Spec}(A_{(f)})$,
יש לנו איזומורפיזם קאנוני על החיתוכים $D_+(f) \cap D_+(g) = D_+(fg)$
ועקב הקאנוניות שלו הוא מקיים את תנאי הקוציקלים.

<u>דוגמאות</u>

1. $\mathbb{P}^n_k = \mathrm{Proj}\ k[X_0, \dots, X_n]$

2. A חוג קומוטטיבי, $I \subset A$ אידיאל,

$$R \subseteq A[t]$$

תת-חוג מדורג,
$R_n = I^n \cdot t^n \subseteq A[t]_n = A \cdot t^n$.
בפרט, $R_0 = A$.
נתבונן עתה בספקטרום פרויקטיבי $\mathrm{Proj}(R)$.
הוא נקרא ~~ספקטרום~~ ניפוח של $\mathrm{Spec}(A)$ בתת-קבוצה הסגורה $V(I)$.

הערה

תרגילים:

1. במקרה $A = k[x_1, \dots, x_n]$, $I = (x_1, \dots, x_n)$
תארו את הניפוח המוגדר ע"י ההדבקה עם $Proj(R)$.

~~הוכיחו כי אם $A \to B$ הומומורפיזם~~

2. יהי A חוג מדורג. נגדיר B ע"י:

$$B_n = A_{n \cdot d}$$

כאשר d מספר קבוע כלשהו.
תבנו איזומורפיזם בין $Proj(A)$ לבין $Proj(B)$.

3. יהי $B \subset A$ תת-חוג מדורג כך ש $B_n = A_n$
עבור $n > N$. הוכח כי $Proj(A)$ ו- $Proj(B)$ איזומורפיים.

4. הערה: לא תמיד הומומ' $B \to A$ של חוגים מדורגים
משרה מורפיזם $Proj(A) \to Proj(B)$. מדוע?