גאומטריה אלגברית - 10

דוגמאות של סכימות

1. תהי $X=(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O})$ סכימה אפינית, $U\subseteq X$ תת-קבוצה פתוחה. אזי $(U, \mathcal{O}|_U)$ היא סכימה: נזכיר כי $D(f)$ מהווים בסיס של טופולוגיה זריסקי. כיוון ש- $(D(f),\mathcal{O}|_{D(f)})$ איזומורפית ל- $\operatorname{Spec}(A_f)$, המרחב המחויג $(U,\mathcal{O}|_U)$ מכוסה ע"י סכימות אפיניות.

תת-קבוצות פתוחות של סכימות אפיניות נקראות סכימות קוואזי-אפיניות.

2. יהי $(U_1,\mathcal{O}_1)=\operatorname{Spec} k[x]$, $(U_2,\mathcal{O}_2)=\operatorname{Spec} k[w]$. הקבוצה $U_{12}\subseteq U_1$ היא $D(x)$. U_{12} היא איזומורפית ל- $\operatorname{Spec} k[x,x^{-1}]$. באופן דומה, $U_{21}=\operatorname{Spec} k[w,w^{-1}]$. עתה נשאר להגדיר איזומורפיזם בין U_{12} ל- U_{21}. איזומורפיזם זה ניתן ע"י איזומורפיזם חוגים

$$\theta: k[x,x^{-1}] \to k[w,w^{-1}]$$

המוגדר ע"י $\theta(x)=w^{-1}$

כתוצאת ההדבקה, מקבלים סכימה שנקראת הישר הפרויקטיבי $\mathbb{P}^1_k$.

אגב, הסימון הסטנדרטי לסכימה אפינית $\operatorname{Spec} k[x]$ הוא $\mathbb{A}^1_k$. נתבונן טוב יותר לסכימה שקיבלנו. נניח, כדי לא לסבך את התמונה, כי השדה k סגור אלגברית. אזי הנקודות הסגורות של $\mathbb{A}^1_k$ מתאימות ל-אידיאלים מקסימליים $(x-a)$, $a\in k$, אשר מתאימים לאיברי k. הנקודות הסגורות של $\mathbb{P}^1_k$ מתקבלות ע"י איחוד של שני עותקי k, מודולו יחס שקילות המזהה נקודה $a\neq 0$ בהעתק אחד עם a^{-1} בהעתק השני. את הקבוצה הזאת אפשר לתאר כ- $k\cup\{\infty\}$.

נתאר עתה אוסף החתכים הגלובאליים של אלומת המבנה (פונקציות אלגבריות על $\mathbb{P}^1_k$).

פונקציה כזאת ניתנת ע"י שתי פונקציות, $f(x)$ ו- $g(w)$ המקיימות את התכונה

$$f(x) = g(w^{-1})$$

כאשר $w \neq 0$..

כיוון ש- $f \in k[x]$, $g \in k[w]$, רק פונקציות קבועות מופיעות פה.

הוכחנו כי אין על $\mathbb{P}^1_k$ פונקציות אלגבריות.

<u>תרגיל</u> יהי $a \in \mathbb{P}^1_k$ נקודה סגורה (k סגור אלגברית). תארו פונקציות אלגבריות על $\mathbb{P}^1_k - \{a\}$.

<u>תרגיל</u> כנ"ל עבור $k = \mathbb{R}$? k כללי?

3. נבנה את המרחב הפרויקטיבי מעל מימד n, $\mathbb{P}^n_k$. מרחב זה מדביקים מ- $n+1$ עותקים של $\mathbb{A}^n_k$.

יהיו $x_0, \dots, x_n$ $n+1$ נעלמים. נגדיר לכל $i = 0, \dots, n$ את הסכימה האפינית

$$U_i = \mathrm{Spec}(k[t^i_j]), \quad j = 0, \dots, n, \ j \neq i$$

(ישנם n נעלמים; המספור המוזר שלהם יעזור לתאר את ההדבקה)

נגדיר $U_{ij} \subset U_i$ ~~ע"י~~ כקבוצה $D(t^i_j)$

איזומורפיזם בין U_{ij} לבין U_{ji} ניתן ע"י איזומורפיזם של חוגים מתאימים

$$\theta_{ij} : k[t^i_r, (t^i_j)^{-1}] \to k[t^j_s, (t^j_i)^{-1}]$$

$$\theta_{ij}(t^i_r) = t^j_r \cdot (t^j_i)^{-1}, \quad \theta_{ij}(t^i_j) = (t^j_i)^{-1}$$

הנוסחאות הנ"ל תהיינה יותר מובנות אם נניח $t^i_j = x_j/x_i$.

4. ניפוח (Blowing-up).

עתה נבנה סכימה X יחד עם מורפיזם של סכימות $\pi : X \to \mathbb{A}^{n+1}_k$ (המושג יוסבר מאוחר יותר) המקיים שתי תכונות:

1. π איזומורפיזם על $\pi^{-1}(\mathbb{A}^{n+1}_k - \{0\})$
2. $\pi^{-1}(\{0\})$ איזומורפית ל-$\mathbb{P}^n_k$.

בינתיים נוכל לבדוק את הטענות רק ברמה של מרחבים טופולוגיים. זה יוסיף לנו מוטיבציה ללמוד ולפתח מושגים מתאימים בתורת הסכימות: מורפיזם סכימות, תת-סכימה סגורה, סיב של מורפיזם וכו'.

יהי $A = k[x_0^{\pm1}, \dots, x_n^{\pm1}]$.
נגדיר תת-חוגים $A_i \subset A$ על-ידי הנוסחה

$$A_i = k[x_0, \dots, x_n, \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}]$$

נגדיר $U_i = \operatorname{Spec} A_i$, $i = 0, \dots, n$

הומומורפיזם של חוגים
$$k[x_0, \dots, x_n] \to A_i$$
מגדיר מורפיזם של סכימות $U_i \to \mathbb{A}^{n+1}_k$.

נגדיר
$$U_{ij} = \boxed{\cancel{\operatorname{Spec} A_i}}\, D(x_j/x_i)$$

האיזומורפיזם $U_{ij} \to U_{ji}$ ניתן על-ידי איזומורפיזם של הלוקליזציות של A_i ו-A_j לפי x_j/x_i, x_i/x_j בהתאם, איזומורפיזם הניתן ע"י שיכון של תוך A. הסכימה שמתקבלת X נקראת הניפוח של $\mathbb{A}^{n+1}$ בנקודה ה-$\{0\}$.

(4)

נחקור את ההעתקה $\pi: X \to \mathbb{A}_k^{n+1}$.

נתאר את $\pi^{-1}(D_i)$ כאשר $D_i = D(x_i)$, $i=0,\dots,n$.
זה איחוד של התמונות הנגדיות של העתקות הספקטרום

$$\pi_j : Spec(A_j) \longrightarrow Spec(k[x_0,\dots,x_n])$$

קל מאוד לתאר אותה:

$$\pi_j^{-1}(D_i) = Spec(A_j[x_i^{-1}])$$

קל מאוד לראות כי $D_i \approx \pi_i^{-1}(D_i) \supset \pi_j^{-1}(D_i)$
כך ש-π משרה איזומורפיזם

$$\pi|_{\pi^{-1}(D_i)} : \pi^{-1}(D_i) \to D_i$$

מה שנשאר הוא $\pi^{-1}(\{0\})$ כי $\{0\} = \mathbb{A}^{n+1} - \cup D_i$.
שוב, $\pi^{-1}(\{0\})$ מודבק מ-$\pi_i^{-1}(\{0\})$ שזה
אוסף אידיאלים ראשוניים ב-A_i המכילים $(x_0,\dots,x_n)$.
אנחנו מקבלים כי $\pi_i^{-1}(\{0\}) = Spec\, k[\frac{x_0}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i}]$

כך שאחרי ההדבקה נקבל $\mathbb{P}_k^n$.