מבוא לגיאומטריה אלגברית הרצאה 1

1. מבוא. ג.א. - על מה זה?

מקור עיקרי של גיאומטריה אלגברית – חקירת מערכות משוואות פולינומיאליות. נתבונן במספר דוגמאות כדי להבין אילו שאלות אפשר לשאול בה.

א. קיום פתרונות. משפט פרמה (מאה 17) אין פתרונות למשוואה

$x^n+y^n=z^n$ $(n>2)$ או $x^n+y^n=1$.

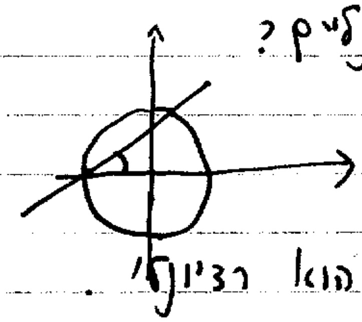
עבור x,y,z שלמים (או רציונליים) השונים מאפס.

(הוכחה: A.Wiles, 1990s)

ב. במקרים רבים יש אינסוף פתרונות ואז נשאלת השאלה איך להציג אותן – למצוא פרמטריזציה של אוסף הפתרונות:

$$x^2+y^2=1$$

איך אפשר למצוא את כל הפתרונות הרציונליים?

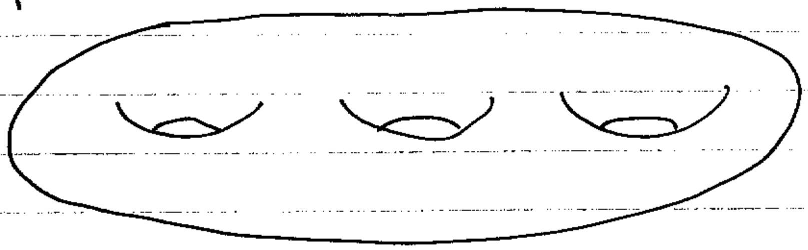


רעיון גיאומטרי: הנקודה (x,y) על המעגל מקיימת $(x,y)\in \mathbb{Q}^2$ אם"ם השיפוע של הקו העובר דרכה ודרך $(-1,0)$ הוא רציונלי.

ואכן, מערכת $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=t(x+1) \end{cases}$ מביאה למשוואה ריבועית עבור x עם מקדמים רציונליים (כי $t\in\mathbb{Q}$).
כיוון שאחד השורשים הוא $x=-1$, גם השורש השני רציונלי.
מסקנה: החלפת משתנים $y=t(x+1)$ מאפשרת לבטא x (ואחר-כך y) דרך t. זה נותן פרמטריזציה של אוסף הפתרונות

2. למשוואה $x^2+y^2=-1$ אין פתרונות ממשיים ולעומת זאת, היא שקולה למשוואה $x^2+y^2=1$ מעל המרוכבים. המסקנה: אוסף פתרונות תלוי מאוד בשדה בו מחפשים את הפתרונות. תופעה זו קיימת אפילו למשוואות עם משתנה אחד.

3. משוואה אחת עם שני נעלמים מגדירה <u>עקום אלגברי</u>. אם מחפשים פתרונות מרוכבים, אוסף הפתרונות מהווה (כמעט) משטח Riemann שנראה כך:



מספר "חורים" נקרא genus (פה $g=3$).

המקרה $g=0$ מתאים לספירה, $g=1$ טורוס .

השערת <u>Mordell</u> - <u>משפט Faltings</u> (1983).

יהי X עקום אלגברי עם מקדמים רציונליים. נניח כי $g\geq 2$. אזי ל-X מספר סופי נקודות עם קואורדינטות רציונליות (= פתרונות רציונליים).

הסימון: $X(\mathbb{C})$ פתרונות מרוכבים, $X(\mathbb{Q})$ - פתרונות רציונליים.

המשפט מראה כי יש קשר הדוק בין $X(\mathbb{Q})$ ל-$X(\mathbb{C})$.
<u>מסקנה</u>: יש טעם לחקור $\{X(K) \mid K \text{ שדה}\}$ ביחד לכל השדות.

ה. נקודות ב-∞.

בפרמטריזציה של $x^2+y^2=1$ הנקודה $(-1,0)$ מתאימה לערך של פרמטר $t=\infty$. זה מצביע על כך כי יש טעם להוסיף "נקודות ב-∞" לעקומים שלנו.

עוד דוגמא המראה את זה: למערכת

$$\begin{cases} y = x^2 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

לפעמים שני פתרונות, ולפעמים פתרון אחד. כדי לקבל פתרונות ב-∞, מחליפים x,y ב- $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ ומקבלים:

$$\begin{cases} x^2 = yz \\ ax + by + cz = 0 \end{cases}$$

מערכת זו שקולה, אחרי הצבה של המשוואה השניה אל המשוואה הראשונה, למשוואה ריבועית הומוגנית שיש לה תמיד שני פתרונות.

ב. משוואות, חוגים ונקודות.

יהי k שדה או אפילו חוג קומוטטיבי.
משוואה פולינומיאלית עם n משתנים - איבר בחוג $k[x_1,\dots,x_n]$.
מערכת משוואות - סידרת איברים

$$P_1,\dots,P_m \in k[x_1,\dots,x_n]$$

מה הוא הפתרון של המערכת?
תשובה ראשונה (נתקן אותה אחר-כך)
- הפתרון הוא אוסף $a_i \in k$ כך ש לכל $j=1,\dots,m$

$$P_j(a_1,\dots,a_n)=0$$

מה לא טוב בהגדרה זו? אנחנו רוצים לפעמים לחפש פתרונות ממשיים או מרוכבים למשוואה עם מקדמים רציונליים. במקרה זה $k=\mathbb{Q}$ אך $a_i \in \mathbb{R}$.

<u>הגדרה</u> יהי k חוג קומוטטיבי.
k-אלגברה קומוטטיבית היא חוג קומוטטיבי L יחד עם הומומ' חוגים

$$\alpha: k \longrightarrow L$$

משמעות ההגדרה: אפשר לחפש פתרונות למערכת משוואות עם מקדמים ב- k בכל k-אלגברה L.

תהי X מערכת משוואות מעל k ותהי L k-אלגברה. אנחנו נסמן ב- $X(L)$ אוסף פתרונות של המערכת ב- L.

<u>הגדרה</u> הומומרפיזם $f: L_1 \to L_2$ של k-אלגבראות הוא הומומ' של חוגים כך שהדיאגרמה

$$\begin{tikzcd} & L_1 \arrow[d, "f"] \\ k \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[r, "\alpha_2"'] & L_2 \end{tikzcd}$$

קומוטטיבית, כלומר $\alpha_2 = f \circ \alpha_1$.

משמעות ההגדרה: כל הומומורפיזם $f: L_1 \to L_2$ מגדיר העתקה

$$X(L_1) \longrightarrow X(L_2)$$

דוגמאות של אלגבראות ושל הומומורפיזמים.

- $k=\mathbb{Z}$ - $\mathbb{Z}$-אלגבראות הן פשוט חוגים קומוטטיביים.

$\mathbb{C}$ באופן טבעי $\mathbb{R}$-אלגברה. ההעתקה $z \mapsto \bar{z}$ (הצמדה)
היא הומו' של אלגבראות.

<u>מסקנה</u>. אם X מוגדרת מעל $\mathbb{R}$ (מקדמי הפולינומים ממשיים), הצמדה מגדירה העתקה

$$X(\mathbb{C}) \to X(\mathbb{C})$$

המעבירה z ל-$\bar{z}$. במלים אחרות, אוסף פתרונות סימטרי ביחס להצמדה.

<u>עוד מסקנה</u>: אם $f: L_1 \to L_2$ הומו' של אלגבראות ואם $X(L_2)=\emptyset$ אז גם $X(L_1)=\emptyset$. למשל, כדי להוכיח כי למשוואה $x^2+y^2=111$ אין פתרונות שלמים ($X(\mathbb{Z})=\emptyset$) מספיק לוודא כי $X(\mathbb{Z}_4)=\emptyset$ שזאת אומרת כי אין פתרונות להשוואה $x^2+y^2=3 \pmod 4$.

<u>שפת הקטגוריות</u>

Alg_k קטגוריה של k-אלגבראות. יש לה <u>אובייקטים</u> - אלגבראות <u>ומורפיזמים</u> - הומו' של אלגבראות. מוגדר מה היא הרכבה של מורפיזמים והיא פעולה אסוציאטיבית.

<u>Set</u> קטגוריה של קבוצות - אובייקטים שלה הם קבוצות, מורפיזמים - העתקות של קבוצות.

<u>הגדרה</u>: פונקטור $F: C \to D$ מקטגוריה C לקטגוריה D הוא

- התאמה של אובייקט $F(x) \in Ob(D)$ לכל אובייקט $x \in Ob(C)$
- לכל זוג $x, y \in Ob(C)$ העתקת הקבוצות

$$\mathrm{Hom}_C(x,y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_D(F(x), F(y))$$

המתואמת עם ההרכבה.

בשפה של קטגוריות, כל מערכת משוואות מעל k מגדירה פונקטור

$$X: Alg_k \longrightarrow Set$$

המתאים לכל k-אלגברה L את הקבוצה $X(L)$ ולכל הומומורפיזם k-אלגבראית $f: L_1 \to L_2$ את ההעתקה

$$X(f): X(L_1) \to X(L_2)$$

<u>פרוש חדש של $X(L)$</u>.

נזכיר כי פתרון ב- $X(L)$ הוא אוסף $L \ni a_1, \dots, a_n$ כך ש- $P_i(a_1, \dots, a_n) = 0$.

אוסף איברים $(a_1, \dots, a_n)$ ב- L אפשר לפרש כהומומ' של אלגבראות

$$\underline{a}: k[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow L$$

המעביר כל פולינום $P \in k[x_1, \dots, x_n]$ לערך שלו $P(a_1, \dots, a_n)$.

לפי משפט על איזומורפיזם, התנאי $P_i(a) = 0$ שהוא שקול לטענה $P_i \in Ker(\underline{a})$, אומר כי $\underline{a}$ ניתן להציג על-ידי דיאגרמה קומוטטיבית

$$\begin{tikzcd} k[x_1, \dots, x_n] \arrow[rr] \arrow[dr, "p"] & & L \\ & k[x_1, \dots, x_n]/I \arrow[ur, "\overline{a}"'] & \end{tikzcd}$$

כאשר $I = \left\{ \sum_{i=1}^{m} P_i Q_i \;\middle|\; Q_i \in k[x_1, \dots, x_n] \right\}$ אידיאל הנפרש על-ידי המשוואות.