

נושאים נבחרים בגיאומטריה

דוד בלנק

מהדורה מתוקנת

תשס"ט

תודות לדר' רוברט שווארץ ולמר עוז בן-שימול על הקלדת חלקים מחוברת זו,
ולפרופ' ולדימיר רובנסקי על הערותיו.

תוכן ענינים

3	I גיאומטריות של המישור	
3	גיאומטריות וחבורת טרנספורמציות	1
4	הגיאומטריה האוקלידית	1.1
11	הגיאומטריה האפינית	1.2
13	גיאומטריה ספירית	1.3
16	תרגילים לפרק 1	1.4
20	הגיאומטריה הפרוייקטיבית	2
20	שני משפטים של הגיאומטריה הפרוייקטיבית	2.1
24	הגיאומטריה הפרוייקטיבית האנליטית	2.2
30	תרגילים לפרק 2	2.3
33	הגיאומטריה ההיפרבולית	3
33	מודל פואנקארה	3.1
34	העתקות מביוס	3.2
39	מידת האורך ההיפרבולית	3.3
42	תרגילים לפרק 3	3.4
45	גיאומטריה אכסיומאטית	4
45	מושגים ראשוניים לגיאומטריה האכסיומאטית	4.1
47	האכסיומות של הילברט	4.2
49	הגיאומטריה האבסולוטית	4.3
59	הגיאומטריה ההיפרבולית האכסיומאטית	4.4
66	תרגילים לפרק 4	4.5
68	II משטחים קומבינטוריים	
68	סימפלקסים וקומפלקסים סימפליציאליים	5
68	סימפלקסים	5.1
70	קומפלקסים סימפליציאליים	5.2
73	קירוב סימפליציאלי	5.3
79	תרגילים לפרק 5	5.4
80	משטחים סימפליציאליים	6
80	משטחים	6.1
85	מיון המשטחים הקומבינטוריים	6.2
92	מציין אוילר	6.3
94	תרגילים לפרק 6	6.4

95	עקומים	III
95	הגיאומטריה של עקום במרחב	7
95	עקומים במרחב	7.1
99	המישור הנושק	7.2
102	המעגל הנושק	7.3
103	תרגילים לפרק 7	7.4
106	שמורות מספריות של עקום מרחבי	8
106	עקמומיות ופיתול	8.1
112	משוואות פרנה	8.2
115	תרגילים לפרק 8	8.3

118	משטחים במרחב	IV
118	משטחים גיאומטריים	9
118	הגיאומטריות הקלאסיות	9.1
123	כיסויים גיאומטריים	9.2
126	חבורות איזומטריות	9.3
130	שריגים וטורוסים	9.4
137	תרגילים לפרק 9	9.5
138	משטחים משוכנים	10
138	פרמטריזציה	10.1
141	עקומים במשטח	10.2
144	תרגילים לפרק 10	10.3
147	התבניות היסודיות של משטח	11
147	תבניות חלקות	11.1
150	התבנית היסודיות הראשונה	11.2
155	התבנית היסודיות השניה	11.3
159	תרגילים לפרק 11	11.4
161	גיאודסים במשטח	12
161	עקמומיות	12.1
166	ה-Theorema Egregium של גאוס	12.2
169	גיאודסים	12.3
171	משפט גאוס-בונה	12.4
175	תרגילים לפרק 12	12.5

177	יריעות חלקות	V
177	יריעות	13
177	יריעות טופולוגיות	13.1

178	יריעות חלקות	13.2	
183	מרחב משיק ונגזרת		14
183	המרחב המשיק	14.1	
185	הנגזרת	14.2	
193	יריעות כלליות		15
193	יריעות מופשטות חלקות	15.1	
195	יריעות מופשטות ומשוכנות	15.2	
198	יריעות עם שפה	15.3	
200	יריעות כווינות	15.4	
202	תבניות דיפרנציאליות		16
202	טנזורים במרחבים ווקטורים	16.1	
207	תבניות דיפרנציאליות במרחבים אוקלידיים	16.2	
211	תבניות דיפרנציאליות על יריעות	16.3	
213	ספרות		17

0. מברא

"גיאומטריה" ($\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$) פירושה ביוונית "מדידת הארץ", ואכן תחילתה במצרים העתיקה כתורת מדידה מעשית. מאוחר יותר עסקה בתכונות מטרייות (כלומר, כמותיות) של צורות במישור ובמרחב. באופן היסטורי נתפשה הגיאומטריה כמתארת מציאות נתונה של המרחב הפיזי בו אנו חיים; ואולם במהלך המאה ה-19 התברר שישנן למעשה גיאומטריות רבות, המתארות מרחבים שונים - חלקם ניתנים למימוש בתוך עולמנו הפיזי, וחלקם קיימים רק כמודלים מתמטיים מופשטים. המשותף לכולם הוא השילוב של אספקטים כמותיים עם תפישה מרחבית.

הדוגמה הראשונה לגיאומטריה מסוג חדש היא הגיאומטריה הספירית, המתארת את מעטפת הכדור: ראשיתה בעת העתיקה כתיאור של "הספירה השמימית" של הכוכבים, אולם בראשית העת החדשה התברר לכל שזוהי בעצם הגיאומטריה של הארץ בכללותה - ולא הגיאומטריה האוקלידית של המישור, המתאימה רק (בקירוב) לאיזורים שטוחים קטנים יחסית. בגיאומטריה הספירית ישנם עדיין מושגים של אורך וזווית, אך ה"ישרים" הם המעגלים הגדולים, ולכן האכסיומות הרגילות של המישור אינן חלות כאן. בכל זאת, הספירה ניתנת לשיכון במרחב האוקלידי התלת-מימדי \mathbb{R}^3 , ולכן ניתן להסיק את תכונותיה מתוך הגיאומטריה האוקלידית הרגילה.

גיאומטריה חדשה נוספת שהתגלתה בראשית העת החדשה היא הגיאומטריה הפרוויי-קטיבית, העוסקת באותן תכונות של המרחב הנשמרות תחת פרספקטיבות שונות. אולם בגיאומטריה זו לא ניתן למדוד גודל של זוויות או קטעים, משום שאלה אינם נשמרים תחת שינויי הפרספקטיבה.

המהפיכה האמיתית בתפישה המתמטית של מושג הגיאומטריה התרחשה במאה ה-19. ראשית המהפיכה היתה בתגלית שישנה עוד גיאומטריה אפשרית למישור ה"שטוח" הרגיל, הלא היא הגיאומטריה ההיפרבולית. בעקבות זאת הבין רימאן (Georg Friedrich Bernhard Riemann, [1826-1866]) שבעצם ניתן להגדיר "גיאומטריות" רבות אחרות בסגנון הגיאומטריה הספירית, עבור יריעות (מרחבים טופולוגיים השקולים מקומית למרחב אוקלידי n -מימדי) שונות.

המאפיין המשותף לכל הגיאומטריות הללו, כמו בהגדרה המקורית של המילה, הוא האפשרות לבצע מדידות של מרחק (וכן של שטחים ונפחים). בגישה של רימאן, מדידה זו נעשית בכלים של החשבון האינפיניטיסימאלי, ובפרט בעזרת אינטגרציה. מכאן שהיא מתרכזת בעיקרה בתכונות המקומיות: המדידות מתבצעות בסביבה של נקודה, ואולם אפשר גם להסתייע בתכונות ובניות מקומיות כאלה כדי להסיק מסקנות גלובאליות על המרחב הנתון בכללותו. אלה עשויות להיות תכונות טופולוגיות (כגון קומפקטיות), מטרייות (כגון שלמות), או אף קומבינציות.

גישה זו מאפשרת לנו גם לטפל במרחבים גיאומטריים שאינם הומוגניים - כלומר, שבהם המבנה הגיאומטרי עשוי להיות שונה באופן מקומי, בדומה להרים ולעמקים שעל פני כדור

הארץ. היתרונות שביכולת לטפל בגיאומטריות שמשתנות באופן מקומי מובנים מאליהם, אך ברור גם שהדבר מסובך יותר מבחינה מתמטית. לכן נדון תחילה בגיאומטריות ההומוגניות, ובראשן הגיאומטריה האוקלידית הקלאסית. כפי שנראה, גם לגביה היה למתמטיקאים של המאה ה-19 מה לחדש, ובפרט הצליחו לתת לה בסיס אכסיומאטי מדויק ומלא.

לאורך השנים פותחו אמצעים מתמטיים רבים לטפל בשאלות גיאומטריות, הן ברמה המעשית של מדידה, מיפוי, עיבוד תמונות, וכדומה, והן בצדדים התיאורטיים. כדאי לציין שגם תחומים שאינם גיאומטריים כלל, לכאורה, זכו לטיפול מתמטי באמצעים אלה - כולל תורת המספרים, האלגברה, ואף הפיזיקה המודרנית. במסגרת המצומצמת שלנו כאן נפגוש כמה מן הגישות המתמטיות הללו, ובכללן:

- (א) מודלים אנליטיים לגיאומטריות האוקלידית, ההיפרבולית, האפינית, והפרוייקטיבית;
- (ב) הגיאומטריה האכסיומאטית: אוקלידית, היפרבולית, ופרוייקטיבית;
- (ג) גיאומטריה וטופולוגיה קומבינטורית (קומפלקסים סימפליציאליים);
- (ד) הגיאומטריה הדיפרנציאלית של עקומים ומשטחים;
- (ה) הטופולוגיה והגיאומטריה הדיפרנציאלית של יריעות חלקות.

חלק I

גיאומטריות של המישור

כאמור, הגיאומטריה החלה בתור מדע אמפירי, אך היא היתה התחום המתמטי הראשון שזכה לטיפול מדוייק יותר - בעצם, ההוכחות הראשונות הידועות לנו (של תאלס, במאה ה-6 לפני הספירה) היו של משפטים גיאומטריים. במאה ה-3 לפנה"ס זכתה הגיאומטריה להצגה אכסיומאטית במסגרת 13 ספרי ה"יסודות" ($\Sigma\tau\omicron\lambda\chi\epsilon\iota\alpha$) של אוקלידס (275-330 לפנה"ס).

בראשית העת החדשה גילו דקארט (René Descartes [1596-1665]) ופרמא (Pierre de Fermat [1601-1665]) את הגיאומטריה האנליטית, המאפשרת לנו לתרגם את כל הגיאומטריה של המישור והמרחב לשפה של מספרים. בעקבות גילויי קולומבוס התפתחה באותה העת גם הגיאומטריה הספירית, ובאותו זמן פיתח המתמטיקאי הצרפתי דזארג (Gérard Desargues [1591-1661]) את הגיאומטריה הפרוייקטיבית, אשר אף לה נמצא מודל אנליטי במאה ה-19. כפי שנראה בפרק 4.4, במאה ה-19 גם נפתרה סופית שאלת אי-התלות של אכסיומת המקבילים האוקלידית, ובתוך כך התגלתה גיאומטריה נוספת של המישור - הלא היא הגיאומטריה ההיפרבולית.

1 גיאומטריות וחבורת טרנספורמציות

עד המאה ה-19 סברו הכל כי הגיאומטריה היא מדע מתמטי המתאר את המציאות הפיזית הסובבת אותנו, ולכן היא בעצם אחת ויחידה. הגיאומטריה הספירית נתפשה איפוא כענף של הגיאומטריה האוקלידית הרגילה, ואילו הגיאומטריה הפרוייקטיבית היתה רק גרסא "קשיחה פחות" של אותו עולם ממשי. אולם עם גילוי הגיאומטריה ההיפרבולית נתערערה גישה זו, והתפתחה מגמה הרואה בכל אלה - ואחרים - תורות מתמטיות שוות מעמד. משום כך בחר קליין (Felix Klein [1846-1925]) בתוכנית ארלנגן (Erlanger Program) שלו משנת 1872 להציע את ההגדרה הבאה:

1.0.1 הגדרה:

גיאומטריה $\langle X, G \rangle$ היא קבוצה X , הנקראית המרחב (space), יחד עם חבורה G של טרנס-פורמציות הפועלת על X .

כזכור, חבורה הפועלת על קבוצה X (group acting on X) היא אוסף G של פונקציות $f : X \rightarrow X$ (בהכרח חד-חד-ערכיות ועל), המקיימת את הדרישות הבאות:

(א) סגירות תחת הרכבה: אם $f, g \in G$, אז גם $f \circ g \in G$ (כאשר $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ לכל $x \in X$).

(ב) קיום איבר אדיש: פונקציית הזהות Id_X (המוגדרת $\text{Id}_X(x) = x$ לכל $x \in X$) ב- G .

(ג) קיום הופכי: אם $G \ni f$, אז גם $G \ni f^{-1}$ (כאשר $f^{-1} \circ f = \text{Id}_X = f \circ f^{-1}$).

באופן שקול, אפשר לחשוב על פעולה זו כהומומורפיזם של חבורות $\Phi : G \rightarrow \text{Aut}(X)$, כאשר $\text{Aut}(X)$ היא חבורת כל התמורות על X (כלומר, אוסף כל הפונקציות $f : X \rightarrow X$ שהן חד-חד-ערכיות ועל; זוהי חבורה תחת ההרכבה).

ניתן לדרוש גם שהפעולה של G על X תהיה טרנזיטיבית (transitive) - כלומר, לכל $X \ni y, x$, קיים $G \ni f$ כך ש- $f(x) = y$. או אפקטיבית (effective) - כלומר, לכל $G \ni g \neq \text{Id}$ יש $X \ni x$ כך ש- $g(x) \neq x$.

הערה: מנקודת מבט זו, תכונה גיאומטרית של $\langle X, G \rangle$ היא כל תכונה של איבר או קבוצה ב- X , הנשמרת תחת פעולת G .

נראה עתה שמספר דוגמאות מוכרות של גיאומטריות מתאימות להגדרה של קליין:

1.1 הגיאומטריה האוקלידית

נתחיל בגיאומטריה האוקלידית הרגילה, בגרסתה האנליטית, שאותה גילו פרמא (Pierre de Fermat [1601-1665]) ודקרט (René Descartes [1596-1650]) במאה ה-17, ונראה כיצד מתב-טאית כאן הגישה של קליין. אפשר לחשוב על הגיאומטריה האוקלידית כמתארת את אותן צורות ותכונות ב- \mathbb{R}^n הנשמרות תחת שינויים במערכת הקואורדינטות - ומתברר שאלה הן בדיוק התכונות שניתנות לתיאור (ישיר או עקיף) בעזרת מושג המרחק בין שתי נקודות:

1.1.1 הגדרה:

עבור וקטורים $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ ב- \mathbb{R}^n :

(א) הנורמה האוקלידית (Euclidean norm) של הוקטור \mathbf{x} היא $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

(ב) המכפלה הסקלארית (scalar product) של \mathbf{x} ו- \mathbf{y} מוגדרת $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

(ג) המרחק האוקלידי בין שתי נקודות הוא $d_E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ (כאשר כרגיל אנו מזהים ווקטור עם נקודת הקצה שלו). בדרך כלל נסמן אותו פשוט ב- d .

התכונה החשובה ביותר של הנורמה האוקלידית נובעת מן התוצאה הידועה הבאה:

1.1.2 אי-שוויון Cauchy-Schwartz

לכל $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$, ומתקיים $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$ אם ורק אם $\vec{x} = \lambda \vec{y}$ או $\vec{y} = \lambda \vec{x}$ עבור $0 \leq \lambda$.

הוכחה: עבור $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ קבועים, נסמן $\alpha := \vec{x} \cdot \vec{y}$, ונניח ש- $\alpha \neq 0$. נגדיר

$$p(t) := \|\vec{x}\|^2 t^2 + 2\alpha t + \|\vec{y}\|^2 = \sum_{i=1}^n (tx_i + y_i)^2$$

ונסמן כרגיל ב- Δ את הדיסקרימיננטה $\alpha^2 - \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2$ של הפונקציה הריבועית p . אם $0 < \Delta$, אז ל- $p(t)$ שני שורשים ממשיים שונים, ולכן הפולינום מקבל גם ערכים שליליים - בסתירה לכך ש- $p(t)$ הוא סכום של ריבועים. מכאן ש- $\Delta \geq 0$, כלומר $\alpha^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2$.
 כנדרש. \square

1.1.3 מסקנה (אי-שוויון המשולש):

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \quad \text{מתקיים } \mathbb{R}^n \ni \vec{y}, \vec{x}$$

1.1.4 הגדרה:

טרנספורמציה אוקלידית (Euclidean motion) n -מימדית היא פונקציה $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ המקיימת $d(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ לכל $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

דוגמא: לכל ווקטור קבוע $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, ההזזה (translation) $T_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ המוגדרת $T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \mathbf{a}$ היא טרנספורמציה אוקלידית.

1.1.5 למה:

אוסף כל הטרנספורמציות האוקלידיות ה- n -מימדיות מהווה חבורה הפועלת על \mathbb{R}^n . היא תסומן ב- Euc^n .

\square

הוכחה: תרגיל.

הערה: שימו לב שמשפט "צלע-צלע-צלע" בחפיפת משולשים מראה שטרנספורמציה כזו שומרת גם על זוויות, ולא רק על אורכי צלעות. אם נגדיר שטח של מצולע ונפח של פאון בע-זרת חלוקתם לריבועים ומשולשים או קוביות ופירמידות משולשיות, בהתאמה, נוכל להראות שטרנספורמציות אוקלידיות שומרות גם על שטחים ונפחים. יתר על כן, הן גם שומרות על יחסי חילה בין ישריות במימדים שונים:

1.1.6 הגדרה:

כזכור, אם $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ ווקטור כלשהו, ו- $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \neq \mathbf{0}$ ווקטור כיוון, הישר \mathcal{L} הנקבע על-ידיהם הוא:

$$\mathcal{L} := \{\mathbf{u}_0 + t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

שלוש נקודות ב- \mathbb{R}^n נקראות קולינאריות (collinear) אם יש ישר המכיל אותן.

1.1.7 למה:

טרנספורמציה אוקלידית $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ שומרת על קולינאריות, ולכן אם $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^n$ ישר, אז גם $T(\mathcal{L})$ ישר ב- \mathbb{R}^n .

\square

הוכחה: תרגיל.

עתה ננסה לזהות מהן כל הטרנספורמציות האוקלידיות ה- n -מימדיות:

1.1.8 הגדרה:

מטריצה $n \times n$ מעל \mathbb{R} נקראית אורתוגונאלית (orthogonal) אם $A \cdot A^t = I_n$ - כלומר, המטריצה המוחלפת של A היא ההופכית שלה.

ניזכר בתוצאה הבאה של האלגברה הליניארית:

1.1.9 טענה:

התנאים הבאים שקולים עבור מטריצה $n \times n$ מעל \mathbb{R} :

(א) A אורתוגונאלית.

(ב) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\|Ax\| = \|x\|$

(ג) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $(Ax) \cdot (Ay) = x \cdot y$

(ד) השורות של A מהוות מערכת אורתונורמאלית (כלומר, שורות שונות ניצבות זו לזו, וכל אחת בעלת נורמה 1).

(ה) העמודות של A מהוות מערכת אורתונורמאלית.

□

הוכחה: תרגיל.

1.1.10 מסקנה:

אם A מטריצה אורתוגונאלית $n \times n$, ההעתקה $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ המוגדרת $T_A(x) := Ax$ היא טרנספורמציה אוקלידית.

1.1.11 למה:

אוסף כל המטריצות האורתוגונאליות $n \times n$ (ובאופן שקול, אוסף כל הטרנספורמציות האוקלידיות ה- n -מימדיות מהצורה T_A) מהווה חבורה, המסומנת O_n ונקראית החבורה האורתוגונאלית (orthogonal group) ממימד n .

□

הוכחה: תרגיל.

1.1.12 הגדרה:

מהגדרה 1.1.8 נובע שלכל מטריצה אורתוגונאלית A מתקיים: $\text{Det}(A) = \pm 1$. אוסף כל המטר-יצות אורתוגונאליות $n \times n$ כך ש- $\text{Det}(A) = 1$ נקראית החבורה האורתוגונאלית המיוחדת (special orthogonal group) ממימד n , ומסומנת SO_n .

1.1.13 למה:

SO_n היא תת-חבורה של O_n (כפי שהשם מורה).

□

הוכחה: תרגיל.

1.1.14 הערה:

אם $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ מטריצה 2×2 מעל \mathbb{R} , אז A אורתוגונאלית אם ורק אם מתקיים:

$$A^t A = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

המשוואה הראשונה פירושה ש- (a, b) נמצאת על מעגל היחידה, כלומר יש $0 \leq \theta < 2\pi$ כך ש- $a = \cos \theta$ ו- $b = \sin \theta$. משתי המשוואות האחרות נראה שישנן שתי אפשרויות:

(א) $A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ - כלומר, ההעתקה הלינארית T_A המיוצגת על-ידי A היא סיבוב בזווית θ סביב הראשית.

(ב) $A = R_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ - כלומר, T_A הוא שיקוף בציר ה- x ואחריו סיבוב בזווית θ , או באופן שקול: שיקוף בישר \mathcal{L} דרך הראשית היוצר זווית $\frac{\theta}{2}$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ביתר כלליות:

1.1.15 טענה:

כל מטריצה אורתוגונאלית $n \times n$ ניתנת להצגה ביחס לבסיס אורתונורמלי מתאים ב- \mathbb{R}^n בצורה:

$$A = \begin{pmatrix} I_k & & & 0 \\ & -I_\ell & & \\ & & R_{\theta_1} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & R_{\theta_m} \end{pmatrix}$$

כאשר $k + \ell + 2m = n$, וכל $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$ היא מטריצת סיבוב כלעיל.

□

הוכחה: תרגיל.

1.1.16 טענה:

כל טרנספורמציה אוקלידית $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ היא מן הצורה $T(x) = Ax + a$, כאשר A מטריצה אורתוגונאלית ו- $a \in \mathbb{R}^n$ ווקטור הזזה קבוע.

הוכחה: אם נסמן $a = T(0)$ ו- $c_i = T(e_i)$ ל- $i = 1, \dots, n$ (כאשר (e_1, \dots, e_n) הבסיס הסטנדרטי ל- \mathbb{R}^n), אז אפשר לבחור מערכת קואורדינטות ב- \mathbb{R}^n שבה a היא ראשית הצירים והווקטורים $\vec{v}_i := c_i - a$ הם ווקטורי הכיוון של הצירים ל- $i = 1, \dots, n$, ובפרט הם מהווים מערכת אורתונורמאלית ב- \mathbb{R}^n , ולכן אם נקבע אותם בתור העמודות של A נקבל את הייצוג הדרוש. \square

1.1.17 הגדרה:

טרנספורמציה אוקלידית מן הצורה $T(x) = Ax + a$ עבור $A \in SO_n$ נקראית טרנספורמציה ישירה (direct) או שומרת-כיוון. כל טרנספורמציה אוקלידית אחרת נקראית הופכת-כיוון. אוסף כל הטרנספורמציות האוקלידיות ה- n -מימדיות הישירות מסומן Euc_+^n .

1.1.18 למה:

Euc_+^n היא תת-חבורה של Euc^n .

הוכחה: תרגיל. \square

הערה: האוסף Euc_-^n של כל הטרנספורמציות האוקלידיות ה- n -מימדיות ההופכות-כיוון אינו מהווה תת-חבורה של Euc^n - מדוע?

לפי טענה 1.1.16 והערה 1.1.14, חבורת הטרנספורמציות האוקלידיות הדו-מימדיות נוצרת על-ידי הזזות, סיבובים (סביב הראשית), ושיקופים (ומספיק בעצם שיקוף אחד - נאמר, בציר ה- x), במובן זה שכל טרנספורמציה אוקלידית היא הרכבה של מספר סופי של פעולות כנ"ל. אולם בעצם אנו יכולים לומר יותר:

1.1.19 טענה:

כל איבר ב- Euc^2 הוא אחד משלושת הבאים:

(א) הזזה T_a בווקטור כלשהו $a \in \mathbb{R}^2$.

(ב) סיבוב $R_{(P,\theta)}$ בזווית θ סביב מרכז כלשהו $P \in \mathbb{R}^2$.

(ג) החלקה (glide) $G_{(\mathcal{L},\vec{a})}$ - כלומר, הרכבה של שיקוף בישר \mathcal{L} עם הזזה בווקטור \vec{a} המוכל ב- \mathcal{L} .

הוכחה: כפי שראינו בהוכחת טענה 1.1.16, איבר T ב- Euc^2 נקבע באופן יחיד על-ידי פעולתו על מערכת קואורדינטות ב- \mathbb{R}^2 - כלומר, לראשית $P_0 = (0, 0)$ ולשתי הנקודות $P_1 = (1, 0)$

ו- $P_2 = (0, 1)$. אם נסמן $Q_i := T(P_i)$, $(i = 0, 1, 2)$, אז $\overrightarrow{Q_0 Q_2}$ הוא ווקטור יחידה ניצב ל- $\overrightarrow{Q_0 Q_1}$, ולכן הוא נקבע באופן יחיד ברגע שנדע אם T טרנספורמציה שומרת-כיוון או הופכת-כיוון:

(א) אם T שומרת-כיוון ו- $\overrightarrow{Q_0 Q_1}$ מקביל ל- $\overrightarrow{P_0 P_1} = e_1$, אז T היא הזזה בווקטור $a = \overrightarrow{P_0 Q_0}$.

(ב) אם T שומרת-כיוון ו- $\overrightarrow{Q_0 Q_1}$ מקביל ל- $\overrightarrow{P_1 P_0} = -e_1$, אז T סיבוב ב- 180° סביב הנקודה $\frac{1}{2}Q_0$.

(ג) אם T שומרת-כיוון, אך $\overrightarrow{Q_0 Q_1}$ אינו מקביל לציר ה- x , אז הישרים $Q_0 Q_1$ ו- $P_0 P_1$ נחתכים בזווית θ כלשהי, ועל האנך האמצעי של הקטע $P_0 Q_0$ ישנה נקודה יחידה O כך ש- $\angle P_0 O Q_0 = \theta$ וגם $\angle P_1 P_0 O = \angle Q_1 Q_0 O$. במקרה זה $T = R_{O, \theta}$.

(ד) אם T הופכת-כיוון ו- $\overrightarrow{Q_0 Q_1}$ מקביל ל- $\overrightarrow{P_0 P_1} = e_1$, יהא d המרחק בין הישרים $P_1 P_0$ ל- $Q_1 Q_0$. אז הכיוון של \mathcal{L} (ושל הווקטור \vec{a} , המוכל ב- \mathcal{L}) הוא $\overrightarrow{Q_0 Q_1}$, והוא נמצא בין שני הישרים במרחק $d/2$ מכל אחד מהם. ווקטור ההזזה \vec{a} הוא היטל $\overrightarrow{Q_0 P_0}$ על \mathcal{L} .

(ה) אם T הופכת-כיוון ו- $\overrightarrow{Q_0 Q_1}$ אינו מקביל ל- $\overrightarrow{P_0 P_1} = e_1$, תהא ϕ הזווית בין $\overrightarrow{P_1 P_0}$ ל- $\overrightarrow{Q_1 Q_0}$. אז הכיוון של \mathcal{L} (ושל ווקטור ההזזה \vec{a} , המוכל ב- \mathcal{L}) הוא $\vec{v} := (\cos \frac{\phi}{2}, \sin \frac{\phi}{2})$ (כלומר, חוצה הזווית בין $\overrightarrow{P_1 P_0}$ ל- $\overrightarrow{Q_1 Q_0}$).

הישר \mathcal{L} הוא אותו ישר מבין אלה בעלי ווקטור כיוון \vec{v} המקיים: $d(P_0, \mathcal{L}) = d(Q_0, \mathcal{L})$. אם A, B הם היטלי P_0, Q_0 בהתאמה על \mathcal{L} , אז $\vec{a} := \overrightarrow{AB}$ ו- $T = G_{(\mathcal{L}, \vec{a})}$. \square

שתי העובדות הבאות אומרות ביחד ש- Euc^2 נוצרת על-ידי שיקופים בלבד:

1.1.20 למה:

(א) אם מרכיבים את השיקופים R_k ו- R_ℓ בשני ישרים הנחתכים בנקודה P בזווית $\frac{\theta}{2}$, מקבלים סיבוב ב- θ סביב P .

(ב) הרכבה של שיקופים בשני ישרים מקבילים $k \parallel \ell$ שהמרחק ביניהם $\frac{a}{2}$ מהווה הזזה בכיוון הניצב לשני הישרים במרחק a .

בפרט (א) אומר שהרכבה של שני שיקופים בישרים k ו- ℓ מאונכים זה לזה מהווה שיקוף בנקודת החיתוך P (שהיא גם הנקודה היחידה הנקבעת על-ידי $T := R_k \circ R_\ell$).

הוכחה: תרגיל. \square

הערה: במשך אלפי שנים נבנה קורפוס מרשים של משפטים על הגיאומטריה האוקלידית (בעיקר של המישור). רובם הוכחו באופן סינתטי, מתוך מערכת אכסיומות (ר' פרק 4), ובמקרים רבים הוכחות כאלה יותר יעילות מאלה של הגיאומטריה האנליטית. אולם יש מקרים שבהם השימוש בחבורות טרנספורמציות יכול להקל על הוכחתם של משפטים קלאסיים:

1.1.21 משפט:

בגיאומטריה האוקלידית של המישור $(\mathbb{R}^2, \text{Euc}^2)$, סכום הזוויות במשולש הוא 180° .

הוכחה: בהינתן משולש $\triangle ABC$ במישור, נסמן ב- T את ההזזה בווקטור \vec{AC} , ויהא $\triangle A'B'C' := T(\triangle ABC)$, כך ששני המשולשים חופפים. בנוסף, $d(B, B') = d(A, C)$ (כי $C = A'$), ולכן $\triangle BA'B' \cong \triangle ABC$. מכאן ש-

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \angle B'A'C' + \angle BCB' + \angle ACB = 180^\circ$$

כי A, C, C' ו- C' הן על ישר אחד. \square

הערה: לפי ההגדרה כל הטרנספורמציות האוקלידיות שומרות על המרחק האוקלידי הרגיל, ולכן שתי צורות A, B מזוהות על-ידי Euc^n (כלומר, יש $T \in \text{Euc}^n$ כך ש- $T(A) = B$) אם ורק אם הן חופפות. לעומת זאת:

1.1.22 הגדרה:

הגיאומטריה האוקלידית המכוונת (oriented), הנקבעת על-ידי $(\mathbb{R}^n, \text{Euc}_+^n)$, יכולה להבדיל בין צורה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ לבין השיקוף שלה - כך למשל אין טרנספורמציה אוקלידית ישירה המעבירה צורה של כף יד שמאל לצורה של כף יד ימין.

1.1.23 הגדרה:

חבורת הדמיון Sim^n נוצרת על-ידי Euc^n והמתיחות (dilations) $T_r(\vec{x}) := r\vec{x}$ (עבור $0 < r$). הגיאומטריה של הדמיון $(\mathbb{R}^n, \text{Sim}^n)$ מזהה כל שתי צורות דומות; היא חסרה איפוא מידת אורך, אולם מבדילה בין משולשים, למשל, על-פי הזוויות בלבד. שימו לב שהיחס בין קטעים נשמר בגיאומטריה של הדמיון - ולמעשה זוהי הגיאומטריה המתאימה לשרטוטים בקני-מידה שונים, ולכן ניתן לומר במידה מסויימת של הצדקה שהיא - ולא $(\mathbb{R}^n, \text{Euc}^n)$ - היא המתאימה בהגדרתו של קליין לגיאומטריה האוקלידית הסינתטית (האכסיומאטית).

1.1.24 טענה:

בגיאומטריית הדמיון המישורית כל הפראבולות שקולות זו לזו.

הוכחה: תרגיל. \square

לעומת זאת, שתי אליפסות דומות זו לזו אם ורק אם יש להן אותה פחיסות (אקסצנטר-יות), ואילו שתי היפרבולות דומות זו לזו אם ורק אם יש להן אותה זווית בין שתי האסימפטו-טות.

1.2 הגיאומטריה האפינית

אם נרחיב את הטרנספורמציות המותרות כך שיכללו (בנוסף לסיבובים, שיקופים, והזזות) את כל ההעתקות לינאריות ההפיכות, נקבל את החבורה האפינית (affine group) ה- n -מימדית Aff^n , הנוצרת על-ידי:

$$(א) \text{ הזזות } T_{\vec{a}}(\vec{x}) := \vec{x} + \vec{a} \text{ עבור } \mathbb{R}^n \ni \vec{a} \text{ קבוע;}$$

$$(ב) \text{ העתקות לינאריות הפיכות } T_A(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} \text{ עבור מטריצה הפיכה } GL_n \ni A \text{ קבועה כלשהי (המקיימת } \text{Det}(A) \neq 0 \text{).}$$

הגיאומטריה האפינית של הישר בעצם זהה לגיאומטריית הדמיון של הישר - כלומר:

1.2.1 למה:

טרנספורמציות אפיניות שומרת על יחסי אורכים של קטעים המוכלים באותו ישר - במילים אחרות, אם $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ טרנספורמציה אפינית, $\mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{L}$ ישר, ו- A, B, C שלוש נקודות שונות על \mathcal{L} , אז $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{T(A)T(B)} : \overline{T(A)T(C)}$.

□

הוכחה: תרגיל.

1.2.2 הערה:

בגיאומטריה האפינית ה- n -מימדית אנו מתעניינים רק בתכונות חילה (שייכות נקודה לישר או מישור, הכלה של ישר במישור, וכדומה), יחסי הסדר, וכן יחסי המרחקים בין נקודות השייכות לישר נתון. בפרט נשמר גם יחס המקבילות (האוקלידית) במישור. מצד שני, מבחינה אפינית כל האליפסות במישור שקולות זו לזו, ואכן במיון האפיני ישנן רק שלושה שניוניות לא-מנוונות במישור, עד כדי שקילות: אליפסות, פראבולות, והיפרבולות.

שתי דוגמאות למשפטים של הגיאומטריה האפינית במישור:

1.2.3 טענה:

שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת.

הוכחה: אם נסמן ב- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ את ווקטורי המיקום של שלושת קודקודי המשולש $\triangle ABC$, אז ווקטורי המיקום של מרכזי הצלעות הם $\vec{p} := \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}), \vec{q} := \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}), \vec{r} := \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$, בהתאמה. הנקודה $\vec{s} := \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ היא נקודת מפגש התיכונים, משום שמתקיים $\vec{s} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{r}$, למשל, ולכן (נקודת הקצה של הווקטור) \vec{s} נמצאת על הישר המחבר את \vec{a} ו- \vec{r} , שהוא בדיוק התיכון מ- A לצלע BC - ובדומה לשני התיכונים האחרים.

לחילופין, הטענה בוודאי נכונה אם $\triangle ABC$ שווה צלעות, מטעמי סימטריה; ולכל משולש אחר, ישנה טרנספורמציה אפינית המעבירה אותו למשולש שווה צלעות.

□

הערה: שימו לב שזהו אכן משפט אפיני, כי המושג של תיכון דורש רק יחסים בין קטעים המוכלים בישר נתון (למה 1.2.1). לעומת זאת, העובדה ששלושת האנכים האמצעיים או שלושת חוצי הזווית במשולש נפגשים בנקודה אחת הן אכן תוצאות אוקלידיות, ואי-אפשר אפילו לנסחן במסגרת הגיאומטריה האפינית.

1.2.4 טענה:

אם AB מיתר קבוע באליפסה נתונה E , אז מרכזי כל המיתרים ב- E המקבילים ל- AB נמצאים על קוטר של האליפסה (כלומר, מיתר העובר דרך המרכז).

הוכחה: הטענה בוודאי נכונה אם E הוא מעגל, בגלל הסימטריה ביחס לשיקוף באנך מרכזי של AB . אך כל אליפסה היא תמונה של מעגל תחת טרנספורמציה אפינית במישור (ולהיפך), וכל התכונות בטענה נשמרות תחת טרנספורמציות אפיניות. \square

הערה: בכל הדוגמאות עד כה השתמשנו במודל הקרטזי הרגיל $X = \mathbb{R}^2$ עבור המרחב של הגיאומטריות המישוריות. אולם מסתבר שמבחינות מסוימות יותר נוח לחשוב על המישור \mathbb{R}^2 כאילו הוא משוכן בתוך \mathbb{R}^3 בגובה 1 - כלומר, אנחנו חושבים על נקודה ב- $X = \mathbb{R}^2 \times \{1\}$ בתור שלשה $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, 1)$.

אם נשתמש במוסכמה הזאת, נמצא שבגיאומטריה האפינית של המישור (ולכן גם בגיאומטריה האוקלידית ובגיאומטריית הדמיון) מתקיימות הטענות הבאות:

1.2.5 טענה:

שלוש נקודות שונות (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ו- (x_3, y_3) ב- \mathbb{R}^2 הן קולינאריות (נמצאות על ישר אחד) אם ורק אם

$$(1) \quad \text{Det} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

הוכחה: זה שקול לכך שקיימת שלשה $\mathbb{R}^3 \ni (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ כך ש- $ax_i + by_i + c = 0$ ל- $i = 1, 2, 3$. אם נזכור שהדטרמיננטה של מטריצה 3×3 מחשבת את שטח המקבילון ב- \mathbb{R}^3 הנפרש על-ידי העמודות שלה, הרי שהתנאי (1) שקול לכך שהמקבילון הזה מנוון - מה שאומר ששלוש הנקודות ב- X הן על ישר אחד (מדוע?). \square

1.2.6 מסקנה

משוואה מפורשת לישר \mathcal{L} העובר דרך שתי נקודות נתונות (a_1, b_1) ו- (a_2, b_2) :

$$\mathcal{L} = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^2 \times \{1\} : \text{Det} \begin{pmatrix} x & a_1 & a_2 \\ y & b_1 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0\}$$

הוכחה: תרגיל. \square

1.2.7 טענה:

שלושה ישרים $\mathcal{L}_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_i x + b_i y + c_i = 0\}$ ($i = 1, 2, 3$) מקבילים (או מתלכדים) אם ורק אם

$$\text{Det} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = 0$$

□

הוכחה: תרגיל.

1.2.8 טענה:

ניתן לתאר את כל הטרנספורמציות האפיניות המישוריות באופן אחיד על-ידי מטריצה מן הצורה:

$$, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כאשר $\text{Det}(A) \neq 0$.

□

הוכחה: תרגיל.

1.2.9 מסקנה:

קולינאריות (כלומר, היות שלוש נקודות על ישר אחד) נשמרת תחת טרנספורמציות אפיניות.

1.2.10 טענה:

במונחים אלה איזומטריה (כלומר, טרנספורמציה אוקלידית) במישור נתונה על ידי מטריצה

$$, A' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & -a & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ או } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -b & a & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

המקיימת $a^2 + b^2 = 1$; הצורה A שומרת כיוון, ואילו הצורה A' מחליפה כיוון.

□

הוכחה: תרגיל.

1.3 גיאומטריה ספירית

למעשה הדוגמא הראשונה של גיאומטריה לא-אוקלידית היתה ידועה בימי קדם: הגיאומטריה הספירית, המתארת את פני כדור הארץ, ומבחינה מתמטית את הספירה

$$. S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

מכיוון שהספירה משוכנת על-פי הגדרתה במרחב האוקלידי התלת-מימדי, היא גם יורשת ממנו את הגיאומטריה שלה. בפרט חבורת הטרנספורמציות הספיריות היא פשוט התת-חבורה של אותן טרנספורמציות אוקלידיות ב- Eucl^3 השומרות על הספירה: אלה אינן כוללות הזזות, כמובן, והן מיוצגות על-ידי החבורה O_3 של המטריצות האורתוגונאליות 3×3 (ר' למה 1.1.11).

1.3.1 הגדרה:

מעגל גדול (great circle) ב- S^2 הוא מעגל המוכל בספירה אשר מרכזו הוא מרכז הספירה. כל מעגל כזה הוא חיתוך של מישור E דרך הראשית ב- \mathbb{R}^3 עם S^2 .

דוגמאות: קו המשווה וקווי האורך בגלובוס.

הערה: המעגלים הגדולים ממלאים את תפקיד הישר בגיאומטריה הספירית (S^2, O_3) . אולם תכונותיהם שונות במקצת מאלה של הישרים האוקלידיים:

1.3.2 למה:

דרך שתי נקודות קטביות יש אינסוף מעגלים גדולים; בכל מקרה אחר, המעגל הגדול דרך P ו- Q הוא יחיד, כי הוא שווה לחיתוך של S^2 עם המישור דרך P, Q ו- O (מרכז הספירה). יתר על כן, כל שני מעגלים גדולים נחתכים בשתי נקודות, כי שני מישורים שונים דרך $O \ni \mathbb{R}^3$ נחתכים בישר דרך O , החותך את S^2 בשתי נקודות קטביות.

1.3.3 הגדרה:

המרחק הספירי (spherical distance) $d_S(P, Q)$ בין שתי נקודות P ו- Q על הספירה S^2 מוגדר להיות אורך הקשת ביניהם על המעגל הגדול המחבר ביניהם.

הערה: מכיוון שמדובר במעגל יחידה, אורך הקשת שווה לגודל הזווית $\angle POQ$ ברדיאנים, לפי הגדרת הרדיאן - כלומר:

$$(2) \quad d_S(P, Q) = \angle POQ = \arccos(\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ})$$

(כי ווקטורי המיקום \overrightarrow{OP} ו- \overrightarrow{OQ} הם רדיוסים, ולכן ווקטורי יחידה).

1.3.4 הגדרה:

הזווית הספירית (spherical angle) בין שני מעגלים גדולים k ו- ℓ המחתיכים בנקודה $P \in S^2$ מוגדר להיות הזווית בין המשיקים לי- k ו- ℓ ב- P - או באופן שקול, הזווית בין שני המישורים L ו- K המתאימים (כך ש- $k = K \cap S^2$ ו- $\ell = L \cap S^2$).

1.3.5 טענה:

אם $\triangle PQR$ משולש על פני הספירה, ו- $\alpha = d_S(Q, R)$, $\beta = d_S(P, Q)$, ו- $\gamma = d_S(P, R)$ הזוויות המרכזיות המתאימות, ו- θ היא הזווית הספירית $\angle QPR$, אז:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \theta$$

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות אפשר להניח ש- $P = (0, 0, 1)$ הוא הקוטב הצפוני, ויהו R', Q' החיתוכים של (המשכי) הקשתות PQ, PR בהתאמה עם קו-המשווה. אפשר להניח (על-ידי סיבוב מתאים סביב הציר) ש- $Q' = (1, 0, 0)$ ו- $R' = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$. אז בקואורדינטות אוקלידיות ב- \mathbb{R}^3 נמצא ש- $Q = (\sin \beta, 0, \cos \beta)$ ואילו:

$$R = \cos \gamma \cdot P + \sin \gamma \cdot R' = (\sin \gamma \cos \theta, \sin \gamma \sin \theta, \cos \gamma)$$

□ מכיוון ש- $\alpha = \angle QOR$ ו- $\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OQ}$ ווקטורי יחידה, נקבל את הדרוש.

1.3.6 למה:

אם P, Q, R שלוש נקודות על פני הספירה, אז $d_S(P, Q) \leq d_S(P, R) + d_S(R, Q)$ עם שוויון אם ורק אם שלוש הנקודות קולינאריות (נמצאות על מעגל גדול אחד).

□ הוכחה: תרגיל.

1.3.7 טענה:

(א) פונקציה $T : S^2 \rightarrow S^2$ היא טרנספורמציה ספירית אם ורק אם היא שומרת על המרחק הספירי (כלומר, $d_S(T(P), T(Q)) = d_S(P, Q)$ לכל $P, Q \in S^2$).

(ב) טרנספורמציה ספירית שומרת על זוויות ספיריות ומעבירה מעגלים גדולים למעגלים גדולים וזוגות של נקודות קטביות לזוגות של נקודות קטביות.

□ הוכחה: תרגיל.

הערה: ניתן כמובן לפתח נוסחאות מתאימות לטריגונומטריה ספירית. לאלה חשיבות מעשית רבה בניווט בקנה מידה גלובאלי, וכדומה. נציג עתה משפט קלאסי של המתמטיקאי האנגלי הריוט (Thomas Harriot [1560-1602]):

1.3.8 משפט:

אם Δ משולש על פני הספירה S^2 עם זוויות α, β, γ , אז שטח המשולש הספירי Δ הוא:

$$(3) \quad \text{Area}(\Delta) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

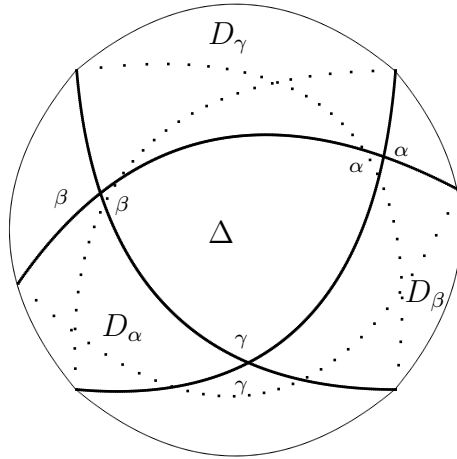
הוכחה: שטח הגזרה שבין שני מעגלים גדולים על S^2 היוצרים ביניהם זווית α היא בדיוק:

$$\frac{\alpha}{2\pi} \text{Area}(S^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 4\pi R^2 = 2\alpha$$

(כי רדיוס הספירה הוא $R = 1$).

אולם צלעות Δ יוצרות שלושה זוגות של גזרות כאלה, עם זוויות α, β, γ , בהתאמה, וכן משולש קטבי Δ' חופף ל- Δ . מכיוון שכל אחת מן הגזרות הללו מכילה או את Δ או את Δ' , למשלים D_α של המשולש Δ בתוך הגזרה עם זווית α יש שטח $2\alpha - \text{Area}(\Delta)$, וכן הלאה. מכיוון ששני העותקים של D_α , שני העותקים של D_β , שני העותקים של D_γ , ו- Δ יחד מכסים את הספירה, הרי ש-

$$2(2\alpha - \text{Area}(\Delta)) + 2(2\beta - \text{Area}(\Delta)) + 2(2\gamma - \text{Area}(\Delta)) + 2\text{Area}(\Delta) = 4\pi$$



□ וחשבון פשוט מראה איפוא ש- $\text{Area}(\Delta) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$, כנדרש.

1.4 תרגילים לפרק 1

1.4.1 הראה/י שאוסף כל הטרנספורמציות האוקלידיות ה- n -מימדיות מהווה חבורה.

1.4.2 הראה/י בעזרת תנאי השוויון באי-שוויון המשולש ששלוש נקודות שונות

$\mathbb{R}^n \ni x, y, z$ נמצאות על ישר אחד אם ורק אם $d(x, y) + d(y, z) = d(x, z)$ (עד כדי סדר).

1.4.3 הראה/י שטרנספורמציות אוקלידיות שומרות על קולינאריות.

1.4.4 הראה/י שאם $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ טרנספורמציה אוקלידית אז לכל $\mathbb{R} \ni t$ ו- $\mathbb{R}^n \ni y, x$

$$\text{מתקיים } T((1-t)x + ty) = (1-t)T(x) + tT(y)$$

1.4.5 הראה/י שטרנספורמציה אוקלידית $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ שומרת על קרניים - כלומר,

לכל $\mathbb{R}^n \ni y \neq x$, תמונת הקרן מ- x בכיוון y תחת T היא הקרן מ- $T(x)$ בכיוון $T(y)$.

1.4.6 הראה/י שאוסף כל המטריצות אורתוגונאליות $n \times n$ מהווה חבורה.

1.4.7 הראה/י שאוסף כל המטריצות אורתוגונאליות $n \times n$ המיוחדות מהווה תת-חבורה

של O_n .

1.4.8 הוכח/י את טענה 1.1.15.

1.4.9 הראה/י שאוסף כל הטרנספורמציות האוקלידיות ה- n -מימדיות הישירות מהווה תת-חבורה של Euc^n .

1.4.10 הראה/י שכל טרנספורמציה אוקלידית של המישור היא הרכבה של לכל היותר שלושה שיקופים.

1.4.11 יהיו $P = (0, 1)$, $Q = (0, 0)$, ו- $R = (1, 0)$ ו- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ טרנספורמציה אוקלידית. מצא/י האם f היא הזזה T_a , סיבוב $R_{(P,\theta)}$, או החלקה $G_{(\mathcal{L},\bar{a})}$ (ר' טענה 1.1.19) בכל אחד מן המקרים הבאים:

$$(א) \quad f(P) = (1.4, 2), \quad f(Q) = (1.4, 1), \quad f(R) = (2.4, 1)$$

$$(ב) \quad f(P) = (0.4, 1.8), \quad f(Q) = (1, 1), \quad f(R) = (1.8, 1.6)$$

$$(ג) \quad f(P) = (1.8, 1.6), \quad f(Q) = (1, 1), \quad f(R) = (0.4, 1.8)$$

1.4.12 הראה/י שהרכבה של שיקופים בשני ישרים מקבילים $k \parallel \ell$ שהמרחק ביניהם $\frac{a}{2}$ היא הזזה בכיוון הניצב במרחק a .

1.4.13 הראה/י שאם מרכיבים את השיקופים R_k ו- R_ℓ בשני ישרים הנחתכים בנקודה P בזווית $\frac{\theta}{2}$, מקבלים סיבוב ב- θ סביב P .

1.4.14 הראה/י שאם לטרנספורמציה אוקלידית $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ יש קבוע $0 < M$ כך ש- $d(T(\mathbf{x}), \mathbf{x}) < M$ לכל $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, אז T היא הזזה.

1.4.15 יהיו T ו- S שתי טרנספורמציות דמיון במישור המסכימות בשלוש נקודות P, Q, R ו- $T = S$ שאינן על ישר אחד. הראה/י ש- $T = S$.

1.4.16 הראה/י שבגיאומטריה האוקלידית שלושת האנכים האמצעיים במשולש נפגשים בנקודה אחת.

רמז: השתמש/י בשיקופים בשניים מהאנכים האמצעיים כדי להראות שנקודת החיתוך שלהם היא מרכז המעגל החוסם.

1.4.17 הראה/י שבגיאומטריה האוקלידית משולש שבו שני גבהים חופפים הוא שווה-שוקיים.

1.4.18 הראה/י שבגיאומטריה האוקלידית משולש שבו שני תיכונים חופפים הוא שווה-שוקיים.

1.4.19 הראה/י שבגיאומטריה האוקלידית שלושת חוצי הזווית במשולש נפגשים בנקודה אחת.

1.4.20 הראה/י שבגיאומטריית הדמיון המישורית כל הפראבולות שקולות זו לזו.

1.4.21 הראה/י שבגיאומטריית הדמיון המישורית שתי אליפסות דומות זו לזו אם ורק אם יש להן אותה פחיסות.

1.4.22 הראה/י שבגיאומטריית הדמיון המישורית שתי היפרבולות דומות זו לזו אם ורק אם יש להן אותה זווית בין שתי האסימפטוטות.

1.4.23 הראה/י שבגיאומטריית הדמיון המישורית ניתן לרצף את המישור במצולעים סדירים חופפים P_n בעלי n צלעות (כלומר, להציג את \mathbb{R}^2 כאיחוד של עותקים זהים של P_n עם פנימים זרים) אם ורק אם $n = 3$, $n = 4$, או $n = 6$.

1.4.24 תהי T טרנספורמציית דמיון במישור ו- S שיקוף בישר ℓ . הראה/י שההרכבה $T^{-1} \circ S \circ T$ היא שיקוף בישר $T(\ell)$.

1.4.25 תהי T טרנספורמציית דמיון במישור ו- S איזומטריה אוקלידית של המישור. הראה/י שההרכבה $T^{-1} \circ S \circ T$ היא איזומטריה אוקלידית של המישור, ושהיא שומרת כיוון אם ורק אם S שומרת כיוון.

1.4.26 הראה/י שבגיאומטריה האפינית של המישור כל האליפסות שקולות זו לזו.

1.4.27 הראה/י שבגיאומטריה האפינית של המישור כל ההיפרבולות שקולות זו לזו.

1.4.28 הראה/י שבגיאומטריה האפינית של המישור כל הפראבולות שקולות זו לזו.

1.4.29 הוכח/י את טענה 1.2.6.

1.4.30 הוכח/י את טענה 1.2.7.

1.4.31 הוכח/י את טענה 1.2.8.

1.4.32 הראה/י שאם $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ היא העתקה אפינית, אז ההעתקה $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ המוגדרת $S(\mathbf{x}) := T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{0})$ היא העתקה ליניארית.

1.4.33 הראה/י שפונקציה $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ היא העתקה אפינית אם ורק אם לכל ישר $\mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{L}$

ההעתקה $T|_{\mathcal{L}}$ היא העתקה אפינית - כלומר, אם ורק אם לכל $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{y}, \mathbf{x}$ ו- $t \in \mathbb{R}$ מתקיים $T((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}) = (1-t)T(\mathbf{x}) + tT(\mathbf{y})$.

1.4.34 הראה/י שאם $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ טרנספורמצייה אפינית, $\mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{L}$, ישר, $\mathcal{L} \ni C, B, A$ נקודות שונות, $T(A) = A'$, $T(B) = B'$, ו- $T(C) = C'$, אז היחס בין אורכי הקטעים AB ו- AC שווה ליחס בין $A'B'$ ל- $A'C'$.

1.4.35 הראה/י שכל טרנספורמציה אוקלידית שומרת כיוון במישור נתונה על ידי מטריצה:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ -b & a & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

המקיימת $a^2 + b^2 = 1$ (ר' טענה 1.2.10).

1.4.36 הראה/י שכל טרנספורמציה אוקלידית הופכת-כיוון במישור נתונה על ידי מטריצה:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & -a & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

המקיימת $a^2 + b^2 = 1$ (ר' טענה 1.2.10).

1.4.37 הראה/י שבכל משולש בספירה S^2 סכום אורכי הצלעות קטן מ- 2π .

1.4.38 הראה/י שבכל משולש בספירה S^2 שלושת התיכונים נפגשים בנקודה אחת.

1.4.39 האם קיימת קבוצה פתוחה לא-ריקה U בספירה S^2 ופונקציה חד-חד-ערכית

$f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ המעתיקה כל קשת (חלק של מעגל גדול) המוכלת ב- U לקטע ישר ב- \mathbb{R}^2 ? הוכח/י את תשובתך.

1.4.40 הוכח/י את למה 1.3.6 (אי-שוויון המשולש לספירה).

1.4.41 הוכח/י את טענה 1.3.7.

2 הגיאומטריה הפרוייקטיבית

הגיאומטריה הפרוייקטיבית צמחה בראשית העת החדשה מתוך ניסיון של אומנים ומתמטי-קאים לתאר את התכונות של צורות גיאומטריות מישוריות הנשמרות תחת הטלות שונות (פרספקטיבות). בפרט ניסו להבין אילו תכונות גיאומטריות נשמרות תחת הטלה מרכזית (מעינו של האומן) של המרחב (העולם התלת-מימדי) על מישור דו-מימדי Π (המישור של הציר).

ברור שתחת הטלה כזו כל מישור E העובר דרך מרכז ההטלה O הופך לקו ישר ב- Π , בתנאי ש- E אינו מקביל ל- Π , ואילו ישר \mathcal{L} דרך O (שאינו מקביל ל- Π) הופך לנקודה ב- Π . אולם למישורים וישרים המקבילים ל- Π אין ייצוג תחת ההטלה. לפיכך נדרש להוסיף "נקודה באינסוף" ל- Π עבור כל ישר דרך O המקביל ל- Π , ונקודות חדשות אלה בכללותן מהוות "ישר באינסוף", המתאים תחת הרחבה זו למישור דרך O המקביל ל- Π . באופן זה אנו מרחיבים את המישור (האפיני) הרגיל Π למישור פרוייקטיבי $\hat{\Pi}$.

שימו לב שבמרחב הפרוייקטיבי כל שני מישורים נחתכים בישר (אולי באינסוף), וכל שני ישרים שונים באותו מישור נפגשים בנקודה (אולי באינסוף).

כוחה של הגיאומטריה הפרוייקטיבית היא בתובנה שלמרות ש- $\hat{\Pi}$ איבד הרבה מכוחה של הגיאומטריה האוקלידית, או אפילו האפינית - אין בו מרחקים או זוויות, למשל - הרי שנשמרים יחסי החילה בין ישרים ונקודות, ועוד מספר תכונות מעניינות. אנו נדגים את המידע הגיאומטרי הגלום ב- $\hat{\Pi}$ בשני משפטים (שניתן לנסחם, ואף להוכיחם, במסגרת הגיאומטריה האוקלידית הסינתטית), ואחר כך נראה כיצד משתלבת הגיאומטריה הפרוייקטיבית בתכנית של קליין.

2.1 שני משפטים של הגיאומטריה הפרוייקטיבית

למרות שהגיאומטריה הפרוייקטיבית אינה מטריית (אין בה מושג של מרחק), המתמטיקאי הצרפתי שאזל (Michel Chasles [1798-1880]) גילה שאפשר להגדיר במסגרתה פונקציות מספר-יות מסויימות:

2.1.1 הגדרה:

בהינתן ארבע נקודות A, B, C, D על ישר אחד (בסדר זה), היחס המרובע (cross ratio) בין ארבע הנקודות הוא הגודל: $[A, B; C, D] := \frac{[AC] \cdot [BD]}{[AD] \cdot [BC]}$.

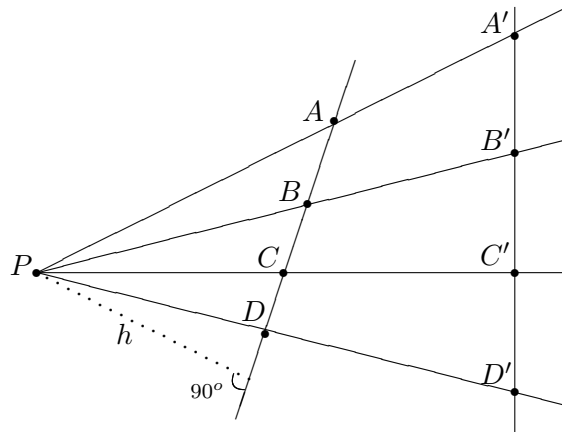
2.1.2 הגדרה:

בהינתן ישר $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^2$ במישור ונקודה $O \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{L}$, הטרנספורמציה $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}$ המתאימה לנקודה $P \in \mathbb{R}^2$ (שאינה O) את החיתוך של הישר OP עם \mathcal{L} נקראית ההטלה המרכזית (central projection) מ- O על \mathcal{L} .

2.1.3 טענה:

היחס המרובע נשמר תחת הטלה מרכזית במישור.

הוכחה: לכל המשולשים $\triangle BCP$, $\triangle BDP$, $\triangle ADP$, $\triangle ACP$ אותו הגובה h , ולכן יחס השטחים שלהם הוא יחס הבסיסים \overline{BC} ו- \overline{BD} , \overline{AD} , \overline{AC} בהתאמה.



מצד שני, ניתן לחשב את שטחי המשולשים הללו בעזרת סינוס זווית הראש - למשל, שטח המשולש $A(\triangle ACP)$ הוא $\frac{\sin(\angle APC) \cdot \overline{PA} \cdot \overline{PC}}{2}$, וכן הלאה, ולכן בסך הכל:

$$[A, B, C, D] = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}} = \frac{A(\triangle ACP) \cdot A(\triangle BDP)}{A(\triangle ADP) \cdot A(\triangle BCP)} = \frac{[\sin(\angle APC) \cdot \overline{PA} \cdot \overline{PC}] \cdot [\sin(\angle BPD) \cdot \overline{PB} \cdot \overline{PD}]}{[\sin(\angle APD) \cdot \overline{PA} \cdot \overline{PD}] \cdot [\sin(\angle BPC) \cdot \overline{PB} \cdot \overline{PC}]} = \frac{\sin(\angle APC) \cdot \sin(\angle BPD)}{\sin(\angle APD) \cdot \sin(\angle BPC)}$$

□ על-ידי חישוב דומה עבור A', B', C', D' נקבל את השוויון הדרוש.

כבר בתקופה הקלאסית נוסחו משפטים שניתן לראותם כיום כשייכים לגיאומטריה הפר-וייקטיבית - הראשון מסוג זה הוא משפט של המתמטיקאי היווני פאפוס (Pappus) מהמאה רביעית לספירה:

2.1.4 משפט

יהו \mathcal{L} ו- \mathcal{L}' שני ישרים שונים במישור ו- $\mathcal{L} \ni C, B, A$, $\mathcal{L}' \ni C', B', A'$ שתי שלשות של נקודות שונות (שאינן ב- $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}'$), ותהי P נקודת החיתוך של הישרים AB' ו- $A'B$, Q חיתוך AC' ו- $A'C$, ו- R חיתוך BC' ו- $B'C$. אז P, Q, R הן על ישר אחד.

ההוכחה הסינתטית אינה קשה, אך יותר קל להוכיחה בשיטות אנליטיות (ר' תרגיל 2.3.14).

הצעד הגדול המשמעותי בפיתוח הגיאומטריה החדשה היה כאמור של הארכיטקט הצרפתי דארג. כדי לנסחו, נזדקק למינוח הבא:

2.1.5 הגדרה:

שני משולשים $\triangle ABC$ ו- $\triangle A'B'C'$ הם בפרספקטיבה (perspective) מנקודת התצפית X אם שלושת הישרים AA' , BB' ו- CC' נפגשים ב- X .
 באותו אופן, שני קטעים AB ו- $A'B'$ הם בפרספקטיבה מ- X אם הישרים AA' ו- BB' נפגשים ב- X .

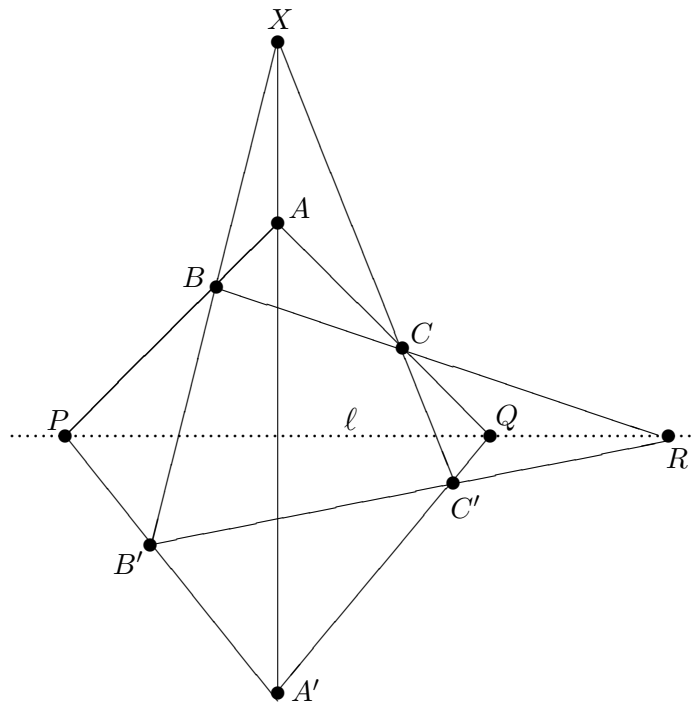
כל משולש $\triangle ABC$ (כלומר, שלוש נקודות שאינן על ישר אחד) נמצא במישור יחיד במרחב, המסומן $\Pi(ABC)$.

2.1.6 משפט דז'רג:

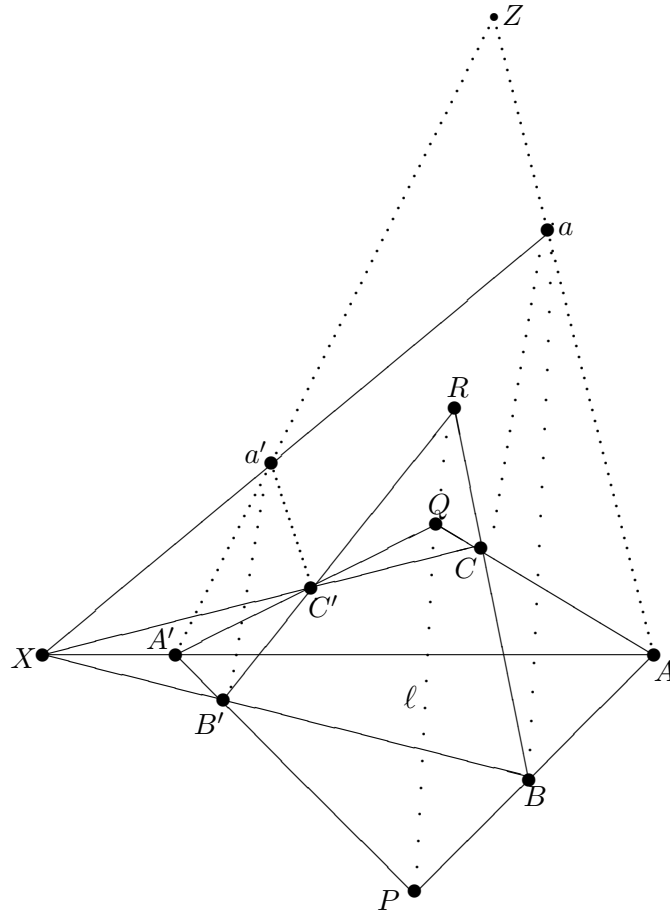
אם שני משולשים $\triangle ABC$ ו- $\triangle A'B'C'$ הם בפרספקטיבה, אז נקודות המפגש של הצלעות המתאימות (AB עם $A'B'$, AC עם $A'C'$ ו- BC עם $B'C'$) הן על ישר אחד.

הוכחה: נסמן ב- X את נקודת התצפית של הפרספקטיבה.

מקרה ראשון: נניח ששני המשולשים אינם באותו מישור.
 אז A, B, A' ו- B' כולן במישור $\Pi(ABX)$, ולכן הישרים AB ו- $A'B'$ נפגשים בנקודה P , השייכת למישור זה, וגם כמובן למישורים $\Pi(ABC)$ ו- $\Pi(A'B'C')$. באופן דומה הישרים AC ו- $A'C'$ נפגשים בנקודה Q והישרים BC ו- $B'C'$ נפגשים בנקודה R . הן R ו- Q הן ב- $\Pi(ABC) \cap \Pi(A'B'C')$. מכיוון ששני המישורים השונים $\Pi(ABC)$ ו- $\Pi(A'B'C')$ נפגשים בישר, נאמר ℓ , הרי ש- $P, Q, R \in \ell$, כנדרש.



מקרה שני: אם שני המשולשים באותו מישור $E = \Pi(ABC) = \Pi(A'B'C')$.



אפשר להניח שהמשולשים שונים, ובלי הגבלת הכלליות הישר BC שונה מן הישר $B'C'$, ולכן הם נפגשים בנקודה $E \ni R$.
 עתה נבחר נקודת תצפית חדשה $E \neq Z$, ונקודה a בין A ל- Z . נסמן ב- a' את נקודת החיתוך של הישרים $A'Z$ ו- Xa , כך ש הקטעים $a'a$ ו- $A'A'$ הם בפרספקטיבה מ- Z .
 אולם עכשיו המשולשים aBC ו- $a'B'C'$ הם בפרספקטיבה מ- X - והם אינם באותו מישור, כי E הוא המישור הנקבע על-ידי הישרים BC ו- $B'C'$, והוא אינו מכיל את a . לכן לפי המקרה הראשון שלוש הנקודות $R = BC \cap B'C'$, $p = aB \cap a'B'$, ו- $q = aC \cap a'C'$ נמצאים על ישר אחד ℓ' .

אם נתבונן בהטלה המרכזית π מהנקודה Z על המישור E , אז $\ell := \pi(\ell')$ הוא ישר, המכיל את שלוש הנקודות $R = \pi(R)$, $Q = \pi(q) = AC \cap A'C'$, ו- $P = \pi(p) = AB \cap A'B'$. □

2.2 הגיאומטריה הפרוייקטיבית האנליטית

כאמור, הגיאומטריה הפרוייקטיבית פותחה בתחילתה בגישה סינתטית, ורק במאה ה-19 נמצא לה מודל אנליטי, שאיפשר לה להשתלב בגישה של קליין (ר' פרק 1).

2.2.1 הגדרה:

לשם שינוי, המרחב של הגיאומטריה הפרוייקטיבית אינו \mathbb{R}^n , אלא קבוצת המנה:

$$\mathbb{RP}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}) / \sim$$

אם נסמן ב- \mathbb{R}^\times את החבורה הכפלית של הסקלארים השונים מ-0 בשדה \mathbb{R} , אז יחס הש-קילות \sim מוגדר: $\vec{x} \sim \lambda \cdot \vec{x}$ לכל $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ ו- $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$.

נהוג לסמן ב- $[x_0; x_1; \dots; x_n]$ את מחלקת השקילות של (x_0, x_1, \dots, x_n) ב- $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$.

הערה: על $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$ פועלת כרגיל החבורה $GL_{n+1}(\mathbb{R})$ של מטריצות $(n+1) \times (n+1)$ ההפיכות, ומכיוון שהפעולה לינארית, היא מכבדת את יחס השקילות \sim :

כלומר, אם $A \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$ ו- $\vec{x} \sim \vec{y}$ (דהיינו, קיים $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ כך ש- $\vec{y} = \lambda \cdot \vec{x}$) אז $A \cdot \vec{y}^t = \lambda A \cdot \vec{x}^t$ ולכן $A \cdot \vec{y}^t \sim A \cdot \vec{x}^t$. מכאן ש- $GL_{n+1}(\mathbb{R})$ פועלת גם על \mathbb{RP}^n . אולם פעולה זו אינה אפקטיבית (הגדרה 1.0.1), במובן זה שהמטריצות A ו- λA פועלות על \mathbb{RP}^n באותו אופן לכל $\lambda \neq 0$.

2.2.2 הגדרה:

חבורות הטרנספורמציות הפרוייקטיביות ה-n-מימדית מוגדרת להיות:

$$PGL_{n+1}(\mathbb{R}) := GL_{n+1}(\mathbb{R}) / \mathbb{R}^\times$$

(חבורת מנה), והגיאומטריה הפרוייקטיבית ה-n-מימדית היא $\langle \mathbb{RP}^n, PGL_{n+1}(\mathbb{R}) \rangle$.

2.2.3 הגדרה:

פולינום $p(x_1, \dots, x_n)$ ב-n משתנים נקרא הומוגני מדרגה k אם

$$p(\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n) = \lambda^k \cdot p(x_1, \dots, x_n) \quad \text{לכל } \lambda \in \mathbb{R}.$$

בפרט זה אומר שאין ל-p איבר חופשי - למעשה, מה שנדרש הוא שכל מונום (מחובר מהצורה $ax_1^{t_1} \dots x_n^{t_n}$) ב-p יהיה ממעלה $k = \sum_{i=1}^n t_i$ בדיוק.

דוגמא:

א. פולינום הומוגני לינארי (= מדרגה 1) ב-n משתנים הוא:

$$p(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n,$$

כאשר לא כל המקדמים מתאפסים.

ב. פולינום הומוגני ריבועי (=מדרגה 2) ב-3 משתנים הוא:

$$p(x, y, z) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Eyz + Fz^2$$

כאשר לא כל המקדמים מתאפסים.

שימו לב שאם $p(x_0, x_1, \dots, x_n)$ פולינום הומוגני (מדרגה כלשהי) ב- $(n+1)$ משתנים, ו- $[x_0; x_1; \dots; x_n] \in \mathbb{RP}^n$, אז יש משמעות לשאלה האם $p(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ - כלומר, זה אינו תלוי בנציג $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$ שנבחר ל- $[x_0; x_1; \dots; x_n]$.

2.2.4 הגדרה:

קבוצת האפסים (zero set) ב- \mathbb{RP}^n של פולינום הומוגני $p(x_0, x_1, \dots, x_n)$ ב- $(n+1)$ משתנים הוא:

$$\{[x_0; x_1; \dots; x_n] \in \mathbb{RP}^n : p(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

2.2.5 הגדרה:

א. קבוצת האפסים של פולינום הומוגני לינארי ב- $(n+1)$ משתנים נקראית על-מישור (hyper-plane) ב- \mathbb{RP}^n . בפרט אם $n = 2$ היא נקראית ישר פרויקטיבי במישור הפרויקטיבי \mathbb{RP}^2 , ואם $n = 3$ היא נקראית מישור פרויקטיבי (projective plane) במרחב הפרויקטיבי התלת-מימדי \mathbb{RP}^3 . ישר פרויקטיבי ב- \mathbb{RP}^3 מוגדר כחיתוך של שני מישורים פרויקטיביים שונים ב- \mathbb{RP}^3 .

ב. קבוצת האפסים של פולינום הומוגני ריבועי ב-3 משתנים $p(x, y, z)$ נקראית שניונית פרויקטיבית (projective quadric) במישור. אם הפולינום p אי-גריק (כלומר, אי-אפשר לכתוב אותו בצורה $p(x, y, z) = q(x, y, z) \cdot r(x, y, z)$ כאשר q ו- r פולינומים הומוגניים לינאריים), נאמר שהשניונית שהוא מגדיר לא-מנוונת (non-degenerate).

2.2.6 טענה:

(א) שלוש נקודות שונות $[x_0^i; x_1^i; x_2^i]$ ($i = 1, 2, 3$) במישור הפרויקטיבי \mathbb{RP}^2 נמצאות על ישר פרויקטיבי אחד אם ורק אם

$$\text{Det} \begin{pmatrix} x_0^1 & x_1^1 & x_2^1 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 \\ x_0^3 & x_1^3 & x_2^3 \end{pmatrix} = 0$$

(ב) קיים תנאי דומה להיות ארבע נקודות ב- \mathbb{RP}^3 על מישור פרויקטיבי אחד, לכך שלש-לושה ישרים פרויקטיביים במישור יש נקודת חיתוך משותפת, ולכל שלארבעה מישור-ים פרויקטיביים במרחב \mathbb{RP}^3 תהיה נקודה משותפת.

□

הוכחה: תרגיל.

2.2.7 הגדרה:

התת-קבוצה:

$$\mathbb{A}^2 := \{[x_0; x_1; x_2] \in \mathbb{RP}^2 : x_2 \neq 0\}$$

במישור הפרוייקטיבי \mathbb{RP}^2 נקראית המישור האפיני (Affine plane). לכל נקודה $\mathbb{A}^2 \ni [x_0; x_1; x_2]$ אפשר לבחור נציג יחיד מהצורה $(x, y, 1) = (\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_2})$. באופן זה ניתן לשכן את המישור האנליטי הרגיל \mathbb{R}^2 בתוך \mathbb{RP}^2 , על ידי $(x, y) \mapsto [x; y; 1]$. המשלים של \mathbb{A}^2 ב- \mathbb{RP}^2 הוא הישר הפרוייקטיבי:

$$\hat{\mathcal{L}}_\infty := \{[x_0; x_1; x_2] \in \mathbb{RP}^2 : x_2 = 0\}$$

הנקרא הישר באינסוף.

כמובן, יכולנו לבחור קואורדינטה אחרת במקום x_2 , ואז היינו מקבלים "ישר באינסוף" אחר. באופן דומה ניתן לשכן את \mathbb{R}^n בתוך \mathbb{RP}^n (ב- $(n+1)$ אופנים שונים).

2.2.8 הגדרה:

לכל תת-קבוצה $\mathbb{RP}^2 \supseteq X$, נקרא ל- $X \cap \mathbb{A}^2$ החלק האפיני (affine part) של X , ואילו $X \cap \hat{\mathcal{L}}_\infty$ ייקרא החלק באינסוף (part at infinity).

דוגמא: לכל ישר פרוייקטיבי $\hat{\mathcal{L}} := \{[x_0; x_1; x_2] \in \mathbb{RP}^2 : ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0\}$ במישור הפרוייקטיבי, החלק האפיני הוא $\mathcal{L} := \hat{\mathcal{L}} \cap \mathbb{A}^2 := \{(x, y, 1) : ax_0 + bx_1 + c = 0\}$ וניתן לזהותו עם הישר (האוקלידי) הרגיל $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\}$, (אלא אם כן $\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_\infty$). לעומת זאת החלק באינסוף של $\hat{\mathcal{L}}$ הוא נקודה בודדת (שוב, אלא אם כן $\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_\infty$).

2.2.9 הגדרה:

לכל פולינום (רגיל) ב- n משתנים $p(x_1, \dots, x_n)$ אפשר להתאים פולינום הומוגני ב- $(n+1)$ משתנים $\hat{p}(x_0, x_1, \dots, x_n)$, על-ידי כך שמכפילים כל מונם ב- p בחזקה מתאימה של המשתנה החדש x_0 , באופן שכול מונם יהיה מדרגה השווה למעלה המקורית של p (כלומר, הדרגה המירבית של המונומים של p). נקרא הומוגניזציה (homogenization) של p .

ולהיפך, מכל פולינום הומוגני $\hat{p}(x_0, x_1, \dots, x_n)$ ב- $(n+1)$ משתנים אפשר לקבל חזרה פולינום רגיל ב- n משתנים על ידי ההצבה $x_0 = 1$.

באופן זה אם

$$X := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : p(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

קבוצה אלגברית ב- \mathbb{R}^n (כלומר, קבוצת האפסים של פולינום, וביתר כלליות של רשימה סופית של פולינומים), נוכל להתאים ל- X את ההומוגניזציה שלה \hat{X} , שהיא תת-קבוצה של \mathbb{RP}^n , אשר החלק האפיני שלה ניתן לזיהוי עם ה- X המקורי, תחת הזיהוי $\mathbb{A}^2 \cong \mathbb{R}^n$.

ולחיפך, אם \hat{X} קבוצה אלגברית פרויקטיבית ב- $\mathbb{R}P^n$, השווה לקבוצת האפסים של פולינום הומוגני $\hat{p}(x_0, x_1, \dots, x_n)$ אז החלק האפני של \hat{X} הוא

$$\{[1; x_1; \dots; x_n] \in \mathbb{R}P^n : \hat{p}(1, x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

שניתן לזהותו עם $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : p(x_1, \dots, x_n) = 0\}$ במישור האפני \mathbb{R}^n (עבור $\{p(x_1, \dots, x_n) := \hat{p}(1, x_1, \dots, x_n) = 0\}$).

דוגמא: אם $p(x, y) = ax + by + c$ פולינום לינארי, אז $\hat{p}(x_0, x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + cx_0$

שימו לב שהישר האפני הרגיל $\mathcal{L} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\}$ המוגדר על-ידי $p(x, y)$ ניתן לזיהוי עם החלק האפני של הישר הפרוייקטיבי

$$\hat{\mathcal{L}} := \{[x_0; x_1; x_2] \in \mathbb{R}P^2 : ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0\}$$

המוגדר על-ידי $\hat{p}(x_0, x_1, x_2)$

2.2.10 טענה:

(א) כל שני ישרים פרויקטיביים במישור שקולים פרויקטיבית (תחת פעולת $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$).

(ב) כל השניויות הפרוייקטיביות הלא-מנוונות במישור (שאינן ריקות) שקולות פרויי-קטיבית ל- $\{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.

הוכחה: (א) תרגיל.

(ב) לפי הג' 2.2.5 שניויות פרויקטיבית \mathcal{P} היא קבוצת האפסים של פולינום הומוגני מדרגה 2, שאפשר לכתוב אותה כ- $ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2 = 0$ או בכתוב מטריציוני $\vec{v} \cdot M \cdot \vec{v}^t = 0$ כאשר $\vec{v} = (x, y, z)$ ו-1

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

מכיוון ש- M מטריצה ממשית סימטרית, קיימת מטריצה אורתוגונאלית $R \in \text{O}_3$ (בפרט הפיכה) כך ש- $\Lambda := R^t \cdot M \cdot R$ אלכסונית, עם איברים $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ באלכסון. נסמן:

$$q_i := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} & \text{אם } \lambda_i > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\lambda_i}} & \text{אם } \lambda_i < 0 \\ 1 & \text{אם } \lambda_i = 0 \end{cases}$$

ל- $i = 1, 2, 3$, ותהא Q המטריצה האלכסונית עם q_1, q_2, q_3 באלכסון, אז

$$N := Q \cdot \Lambda \cdot Q = (RQ)^t \cdot M \cdot (RQ)$$

מטריצה אלכסונית עם איברים מתוך $\{0, 1, -1\}$ באלכסון, המייצגת את השניונית \mathcal{P} בקואורדינטות מתאימות $\hat{v} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ בתור $\hat{v} \cdot N \cdot \hat{v}^t = 0$. אם איברי האלכסון של N כולם 1 - כלומר, מדובר בשניונית $\{\hat{v} \mid \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2 = 0\}$ - אז \mathcal{P} ריקה, כי הפתרון היחיד הוא $\hat{v} = (0, 0, 0)$, שאינו מייצג נקודה ב- $\mathbb{R}P^2$; וכך גם אם איברי האלכסון כולם -1. אם חלק מאיברי האלכסון מתאפסים נקבל שניונית מנוונת. למשל:

$$\{\hat{v} \mid \hat{x}^2 - \hat{y}^2 = 0\} = \{\hat{v} \mid (\hat{x} + \hat{y})(\hat{x} - \hat{y}) = 0\} = \{\hat{v} \mid \hat{x} = \hat{y}\} \cup \{\hat{v} \mid \hat{x} = -\hat{y}\}$$

וזהו איחוד של שני ישרים. לעומת זאת, $\{\hat{v} \mid \hat{x}^2 = 0\} = \{\hat{v} \mid \hat{x} = 0\}$ הוא ישר פרוייקטיבי. לכן המקרים היחידים שבהם \mathcal{P} אינו מנוון ואינו ריק הם:

$$\{\hat{v} \mid \hat{x}^2 + \hat{y}^2 - \hat{z}^2 = 0\} \text{ ו- } \{\hat{v} \mid \hat{x}^2 - \hat{y}^2 - \hat{z}^2 = 0\}$$

□ ואלה כמובן שקולים זה לזה (על-ידי הכפלה ב-1).

הערה: באופו יותר קונקרטי, אם נשתמש במיון האפייני הידוע (ר' הערה 1.2.2) הרי שנמצא:

(א) אליפסה אפיינית נתונה כקבוצת האפסים של הפולינום $p(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ וה-הומוגניזציה שלו היא $\hat{p}(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2$ על-ידי ההצבה (טרנספורמציה פרוייקטיבית) $\hat{x} := \frac{x}{a}$, $\hat{y} := \frac{y}{b}$, $\hat{z} = z$ נקבל:

$$(4) \quad \hat{x}^2 + \hat{y}^2 - \hat{z}^2 = 0$$

(ב) לעומת זאת, היפרבולה אפיינית היא קבוצת האפסים של $q(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$ עם הומוגניזציה $\hat{q}(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z^2$. שוב על-ידי ההצבה $\hat{x} := \frac{x}{a}$, $\hat{y} := \frac{y}{b}$, $\hat{z} = z$ נעביר אותה לצורה הקאנונית (4).

(ג) לבסוף, ההומוגניזציה של משוואת הפראבולה $r(x, y) = ax^2 - y$ היא $\hat{r}(x, y, z) = ax^2 - yz$ ועל-ידי ההצבה $\hat{x} = \sqrt{ax}$, $y = \hat{y} + \hat{z}$, $z = \hat{y} - \hat{z}$ (סיבוב ב- 45°) נקבל שוב את (4).

2.2.11 הגדרה:

לכל שדה F (או חוג עם חילוק) F , המרחב הפרוייקטיבי n -מימדי מעל F הוא הקבוצה $FP^n := (F^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}) / \sim$, כאשר $\vec{x} \sim \lambda \cdot \vec{y}$ אם ורק אם $0 \neq \lambda \in F$. כלומר, FP^n הוא קבוצת התת-מרחבים ה-1-מימדיים של F^{n+1} .

אם ל- F יש טופולוגיה - למשל, אם $F = \mathbb{R}$, \mathbb{C} או \mathbb{H} (הקואטרניונים) - ניתן ל- FP^{n+1} את טופולוגיית המכפלה, ול- FP^n את טופולוגיית המנה.

דוגמא: הישר הפרוייקטיבי הממשי $\mathbb{R}P^1$ הומיאומורפי למעגל S^1 , ואילו הישר הפרוייקטיבי המרוכב $\mathbb{C}P^1$ הומיאומורפי לספירה S^2 .

הערה: אם F הוא \mathbb{R}, \mathbb{C} או \mathbb{H} שדה עם טופולוגיה המושרית על-ידי ערך מחלט (נורמה) $|\cdot| : F \rightarrow [0, \infty)$, נוכל להגדיר נורמה $\|\cdot\| : F^n \rightarrow [0, \infty)$, וכך נקבל מרחב הנקרא ספירת יחידה ב- F^n , המוגדר: $S_F^n = \{\vec{x} \in F^{n+1} : \|\vec{x}\| = 1\}$. עבור $F = \mathbb{R}$, זוהי פשוט ספירת היחידה הרגילה S^n ; ואילו $S_{\mathbb{C}}^n \cong S^{2n+1}$ ו- $S_{\mathbb{H}}^n \cong S^{4n+3}$.

2.2.12 טענה:

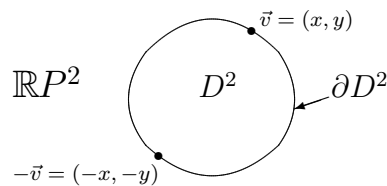
אם F הוא \mathbb{R}, \mathbb{C} , או \mathbb{H} , המרחב הפרוייקטיבי FP^n הומיאומורפי למרחב המנה S_F^n / \sim תחת יחס השקילות: $\vec{x} \sim \lambda \cdot \vec{x}$ עבור $\lambda \in S_F^1$.

□

הוכחה: תרגיל.

2.2.13 למה:

$\mathbb{R}P^2$ הומיאומורפי למרחב המנה D^2 / \sim , כאשר $(x, y) \sim (-x, -y)$ ל- $(x, y) \in \partial D^2$ (כלומר, מספיק לזהות נקודות קטביות על שפת עיגול היחידה).



□

הוכחה: תרגיל.

2.2.14 הערה

במאה ה-19 פיתחו פאנו (Gino Fano) ופיירי (Mario Pieri) מערכת אכסיומות לגיאומטריה הפרוייקטיבית, שבה היחס היחיד הוא יחס החילה:

A_1 . ישנן שלוש נקודות שאינן על ישר אחד.

A_2 . בכל ישר יש לפחות שלוש נקודות.

A_3 . לכל שתי נקודות שונות $A \neq B$ יש ישר יחיד $\ell(AB)$ המכיל את שתיהן.

A_4 . אם A, B, C ו- D ארבע נקודות (במרחב) ו- $\ell(AB) \cap \ell(CD) \neq \emptyset$, אז גם $\ell(AC) \cap \ell(BD) \neq \emptyset$.

A_5 . לכל מישור Π יש נקודה שאינה במישור זה.

A_6 . לכל שני מישורים לפחות שתי נקודות משותפות.

A_7 . אם A, B, C ו- D ארבע נקודות, ואף שלוש אינן על ישר אחד שלוש נקודות האלכסון

$P := \ell(AB) \cap \ell(CD)$, $Q := \ell(AC) \cap \ell(BD)$, ו- $R := \ell(AD) \cap \ell(BC)$ אינן על ישר אחד.

2.2.15 הגדרה:

אם P נקודה שאינה על ישר ℓ , ישנה התאמה חד-חד ערכית ועל בין אוסף הישרים דרך P (הנקראת האלומה (pencil של P), לבין הנקודות של ℓ , המתאימה לישר m דרך P את נקודת החיתוך M של m עם ℓ . התאמה זו נקראת פרוייקציה אלמנטרית (elementary projection). הרכבה של פרוייקציות אלמנטאריות נראית פרוייקציה (projectivity).

A_8 . אם T פרוייקציה השומרת על שלוש נקודות שונות A, B, C על ישר כלשהו ℓ - כלומר, $T(A) = A$, $T(B) = B$, ו- $T(C) = C$ אז $T(X) = X$ לכל $X \in \ell$.

הערה: מעניין לציין שהעובדה שהזדקקנו לעבור למרחב התלת-מימדי כדי להוכיח את משפט דזרג במישור אינה מקרית: מסתבר שאם נשתמש במערכת האכסיומות לעיל במישור (ללא אכסיומות A_4, A_5, A_6), אי-אפשר להוכיח את משפט 2.1.6, כי יש מודלים של הגיאומטריה הפרוייקטיבית המישורית שבהם הוא אינו תקיף.

כמובן, המישור הפרוייקטיבי \mathbb{RP}^2 כפי שהוגדר בסעיף 2.2.1 מהווה מודל עבור האכסיומות לגיאומטריה הפרוייקטיבית האכסיומאטית של המישור, ובו אכן מתקיים משפט דזרג.

2.3 תרגילים לפרק 2

2.3.1 הראה/י שניתן להרחיב את מושג ההטלה המרכזית (הג' 2.1.2) למישור הפרוייקטיבי, ושבמקרה זה ההטלה של החלק האפני \mathcal{L}_1 של ישר פרוייקטיבי אחד $\hat{\mathcal{L}}_1$ על החלק האפני \mathcal{L}_2 של ישר פרוייקטיבי שני $\hat{\mathcal{L}}_2$ ניתן (ביחס לקואורדינטות אפניות כלשהן t_i על \mathcal{L}_i , $i = 1, 2$) על-ידי:

$$(א) \quad t_1 \mapsto t_2 + \alpha \text{ עבור } \alpha \text{ קבוע, אם } \mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \text{ ו-} O \text{ נקודה באינסוף.}$$

$$(ב) \quad t_1 \mapsto \beta \cdot t_2 \text{ עבור } 0 \neq \beta \text{ קבוע, אם } \mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \text{ ו-} O \text{ נקודה סופית.}$$

$$(ג) \quad t_1 \mapsto 1/t_2 \text{ אם } \mathcal{L}_1 \text{ מקביל לציר ה-} x, \mathcal{L}_2 \text{ מקביל לציר ה-} y, \text{ ו-} O = (0, 0) \text{ הראשית.}$$

2.3.2 הראה/י שלכל שני ישרים פרוייקטיביים $\hat{\mathcal{L}}_1$ ו- $\hat{\mathcal{L}}_2$ כל הטלה מרכזית $T: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \hat{\mathcal{L}}_2$ במישור הפרוייקטיבי (מנקודה שאיננה על שני הישרים) אפשר לבחור קואורדינטות אפניות מתאימות כך ש:

$$t_2 = T(t_1) = \frac{at_1 + b}{ct_1 + d} \text{ עבור } a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0,$$

כלומר, $T: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ מיוצגת על-ידי העתקה לינארית שברית (linear fractional mapping).

2.3.3 הראה/י שבהינתן שלוש נקודות $\mathbb{R} \ni z, y, x$ ומספר α , קיים $\mathbb{R} \ni w$ יחיד כך שהיחס המרובע

$$[x, y; z, w] := \frac{(x-z)(y-w)}{(x-w)(y-z)}$$

(הג' 2.1.1) שווה ל- α .

2.3.4 הראה/י שלכל ארבע נקודות $\mathbb{R} \ni w, z, y, x$, אם $\alpha := [x, y; w, z]$ אז:

$$[x, y; w, z] = 1/\alpha \quad (\text{א})$$

$$[y, x; z, w] = 1/\alpha \quad (\text{ב})$$

$$[x, z; y, w] = 1 - \alpha \quad (\text{ג})$$

והסק שבכל 24 התמורות האפשריות על (x, y, w, z) ניתן לקבל את ששת הערכים הבאים ליחס המרובע:

$$\alpha, \frac{1}{\alpha}, 1 - \alpha, 1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{1 - \alpha}, \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

2.3.5 הוכח/י את טענה 2.2.6.

2.3.6 הראה/י שכל שני ישרים פרוייקטיביים במישור שקולים פרוייקטיבית.

2.3.7 הראה/י שניתן להציג את המרחב הפרוייקטיבי ה- n -מימדי כאיחוד זר

$$\mathbb{R}P^n = \bigsqcup_{i=0}^n \mathbb{A}^i \quad \text{כאשר } \mathbb{A}^i \text{ איזומורפי ל-} \mathbb{R}^i \text{ (ו-} \mathbb{A}^0 \text{ מכיל נקודה אחת בלבד)}.$$

2.3.8 הראה/י שלהעתקה האפינית $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדרת $T(x, y) = (3x - 2, 4y - 3)$

יש נקודת שבת יחידה (כלומר, $\mathbb{R}^2 \ni v$ יחיד כך ש- $T(v) = v$).

מצא/י את ההעתקה הפרוייקטיבית $\hat{T}: \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ המרחיבה את T , ומצא/י את כל נקודות השבת של \hat{T} .

רמז: הראה/י ש- $\hat{v} = (x; y; z)$ נקודת שבת של העתקה פרוייקטיבית לינארית מהצורה $T(\hat{v}) = A \cdot \hat{v}^t$ אם ורק אם \hat{v} ווקטור עצמי של A .

2.3.9 מצא/י את נקודות השבת של העתקה האפינית $T(x, y) = (x - y + 2, x + y + 3)$

את ההעתקה הפרוייקטיבית \hat{T} המרחיבה את T , ואת כל נקודות השבת של \hat{T} .

2.3.10 בהינתן $z = (1 - t)x + ty$ ($\mathbb{R} \ni t$), מצא/י נוסחא ל- s כך ש- $z = (1 - s)x + sy$

כפונקציה של t . מצא/י כיצד משתנה היחס $t = \frac{z-x}{y-x}$ כאשר מבצעים תמורה כלשהי על (x, y, z) - כך שמתקבלת פעולה של החבורה הסימטרית S_3 על קבוצת הערכים האפשריים ל- t .

2.3.11 בהינתן $P = (1; 0)$, $Q = (0; 1)$ ו- $R = (1; 1)$ שלוש נקודות בישר הפרוייקטיבי

\mathbb{RP}^1 , מצא/י את ההעתקות הפרוייקטיביות הלינאריות המעבירות את P, Q, R ל- P, R, Q ול- Q, P, R (בסדר זה). מה קורה לנקודה כללית $\mathbb{RP}^1 \ni S = (1; t)$ תחת העתקות אלה? העתקות אלה מיוצגות על-ידי מטריצות הפיכות 2×2 ו- A ב- B בהתאמה. הראה/י ש- A ו- B יוצרות תת-חבורה G של $GL_2(\mathbb{R})$ האיזומורפית לחבורה הסימטרית S_3 .

2.3.12 הוכח/י את טענה 2.2.12.

2.3.13 הוכח/י את למה 2.2.13.

2.3.14 הוכח/י את משפט 2.1.4 באופן אנליטי.

רמז: הראה/י תחילה שאפשר להניח ש- $A = [1; 0; 0]$, $B = [0; 1; 0]$ ו- $A' = [0; 0; 1]$ ו- $B' = [1; 1; 1]$ והסק/י ש- $P = [0; 1; 1]$.

2.3.15 הוכח/י את משפט 2.1.6 באופן אנליטי, שוב על-ידי בחירת מערכת קואורדינטות נוחה.

3 הגיאומטריה ההיפרבולית

כפי שנראה בפרק 4.4 בהמשך, החלפת אכסיומת המקבילים האוקלידית בשלילתה מובילה לתורה חדשה ומעניינת, שבה יש לישרים מקבילים התנהגות לא-צפויה (מבחינת הגיאומטריה האוקלידית לה הורגלנו). תופעות אלה התגלו כבר במאה ה-18 על-ידי סאכרי (Girolamo Saccheri [1667-1733]), שהראה שההנחה שדרך נקודה מחוץ לישר נתון יכולים לעבור יותר מישר מקביל אחד מובילה למסקנות "הסותרות את אופי הקו הישר", כדברו.

בראשית המאה ה-19 הבין גאוס (Carl Friedrich Gauss [1777-1855]), ואחריו לובאצ'בסקי (Nikolai Ivanovich Lobachevski [1792-1856]) ובוויאי (János Bolyai [1802-1860]), שניתן לפתח גיאומטריה חדשה אם מחליפים את אכסיומת המקבילים של אוקלידס בשלילתה. תורה חדשה זו נקראת הגיאומטריה ההיפרבולית (hyperbolic geometry).

עדיין נותרה השאלה האם הגיאומטריה החדשה הזו היא עקבית - או שמא בסופו של דבר תתגלה בה סתירה פנימית, כפי שסבר סאכרי. בעיה זו הגיעה לפתרונה באמצע המאה ה-19, כאשר בלטרמי (Eugenio Beltrami [1835-1900]), קליין, ופואנקארה (Henri Poincaré [1854-1912]) גילו מספר מודלים לגיאומטריה ההיפרבולית. כל המודלים האלה ניתנים להצגה בתוך הגיאומטריה האוקלידית - ומכאן שכל סתירה בגיאומטריה ההיפרבולית היא באותו זמן סתירה בגיאומטריה האוקלידית (ובעצם: בתורת המספרים, שבה מנוסח המודל האנליטי של הגיאומטריה האוקלידית).

מאוחר יותר התברר שהגיאומטריה ההיפרבולית משחקת תפקיד מרכזי בענפים רבים במתמטיקה, והיא מהווה תחום פעיל של מחקר מתמטי עד היום. אנו נתרכז במודל אנליטי אחד, מתוך השניים שגילה פואנקארה. כדי לתארו, נזדקק למספר מושגים מקדימים.

3.1 מודל פואנקארה

קל ליצר מודלים של הגיאומטריה ההיפרבולית שבהם מתקיימים יחסי החילה והסדר המוכר-ים של נקודות וישרים במישור, ובנוסף:

אכסיומת המקבילים ההיפרבולית: דרך כל נקודה P מחוץ ל"ישר" נתון \mathcal{L} עוברים ב"מישור" אינסוף "ישרים" שונים שאינם נחתכים עם \mathcal{L} .

למשל, נוכל לקחת בתור ה"מישור" עיגול פתוח, ובתור "ישרים" את המיתרים הפתוחים. הבעיה היא להגדיר מטריקה (פונקציית אורך מתאימה על קטעים), ובנוסף מידה מתאימה על הזוויות. מסתבר שניתן אמנם לעשות זאת עבור מודל ה"מיתרים", שאותו מצא קליין. אולם מודל אלגנטי יותר הוא זה של פורנקארה.

כאמור, ישנם למעשה שני מודלים שקולים שהציע פואנקארה למישור ההיפרבולי. למען הפשטות, נתרכז באחד מהם: מודל חצי המישור העליון (upper half plane), שבו ה"מישור ההיפרבולי" הוא הקבוצה $\mathbb{H} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, ואילו ה"ישרים" הם חצאי

מעגלים או ישרים ניצבים לציר ה- x , שייקראו שניהם חצאי-מעגלים מוכללים. הנקודות הן כמובן הנקודות של \mathbb{H} .

היתרון של מודל זה הוא היותו מודל קונפורמי - כלומר, המידה של הזוויות היא המידה האוקלידית הרגילה (כאשר מפרשים זווית בין שני עקומים כזווית בין המשיקים בנקודת החיתוך).

3.1.1 הערה:

כדי לטפל בישרים, וגם כדי להגדיר את המטריקה, נוה להשתמש בכתוב מרוכב, כאשר אנו חושבים על \mathbb{H} כתת-קבוצה של המישור המרוכב המורחב $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (הספירה של רימאן). כזכור משוואת ישר במישור האנליטי \mathbb{R}^2 היא $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ (עבור $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$) ובכתוב מרוכב:

$$az + \bar{a}\bar{z} + b = 0$$

עבור $\mathbb{R} \ni b = 2\gamma$, $\mathbb{C} \ni a = \alpha - i\beta$, כאשר גם $z = \infty$ שייך לישר במישור המורחב $\hat{\mathbb{C}}$.

לעומת זאת, משוואת מעגל ברדיוס $0 < r$ סביב (x_0, y_0) במישור האנליטי היא $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, או בכתוב מרוכב $r^2 = |z - z_0|^2 = (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)$

כלומר:

$$z\bar{z} + az + \bar{a}\bar{z} + b = 0$$

עבור $\mathbb{R} \ni b := |z_0|^2 - r^2$, $\mathbb{C} \ni a := -\bar{z}_0$, ומכאן אנו רואים שנוסחת מעגל מוכלל ב- $\hat{\mathbb{C}}$ היא:

$$(5) \quad Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$$

עבור $\mathbb{R} \ni C, A$ ו- $\mathbb{C} \ni B$, כאשר $(A, B) \neq (0, 0)$. ישר (רגיל) מתקבל אם ורק אם $A = 0$. שימו לב שמכיוון שישיר ב- $\hat{\mathbb{C}}$ כולל גם את ∞ , הרי שאם נזהה את $\hat{\mathbb{C}}$ עם הספירה S^2 (עם ∞ בקוטב הצפוני, נאמר), הרי שכל ה"מעגלים המוכללים" אכן מופיעים בתור מעגלים ב- S^2 .

3.2 העתקות מביוס

אנו נציג את הגיאומטריה ההיפרבולית בגישה של קליין - כלומר, על-ידי מציאת חבורת טרנספורמציות מתאימה הפועלת על הקבוצה \mathbb{H} . תנאי ראשון לבחירת הטרנספורמציות הללו הוא שהן תעברנה מעגלי מוכלל אחד למעגל מוכלל אחר.

ברור שכל ה- z מהצורה $w = f(z) = \alpha z + \beta$ (עבור $\alpha \neq 0$, $\mathbb{C} \ni \beta, \alpha$) שומרת על מעגלים מוכללים (ובעצם אף מעבירה מעגל למעגל וישר לישר), ואכן אם $w = \alpha z + \beta$ אז $z = \frac{w - \beta}{\alpha}$ ולכן אם נציב ב-(5) נקבל:

$$\begin{aligned} 0 &= Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = A \frac{w - \beta}{\alpha} \cdot \frac{\overline{w - \beta}}{\alpha} + B \frac{w - \beta}{\alpha} + \bar{B} \left(\frac{\overline{w - \beta}}{\alpha} \right) + C \\ &= \frac{A}{\alpha\bar{\alpha}} w\bar{w} + \left(\frac{B}{\alpha} - \frac{A\bar{B}}{\bar{\alpha}} \right) w + \left(\frac{\bar{B}}{\bar{\alpha}} - \frac{A\beta}{\alpha} \right) \bar{w} + \left(\frac{\beta\bar{\beta}}{\alpha\bar{\alpha}} - \frac{B\bar{\beta}}{\alpha} - \frac{\bar{B}\beta}{\bar{\alpha}} + C \right) \end{aligned} \quad (6)$$

וזהו שוב מעגל מוכלל.

בדומה, ההיפוך במעגל היחידה, המוגדר $J(z) := \frac{1}{z}$ מקיים $J(0) = \infty$, $J(\infty) = 0$, ומכיוון ש- $w = \frac{1}{z}$ אם ורק אם $z = \frac{1}{w}$, על-ידי הצבה ב-(5) נקבל:

$$0 = Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = A\frac{1}{w\bar{w}} + B\frac{1}{w} + \bar{B}\frac{1}{\bar{w}} + C$$

ואחרי כפל ב- $w\bar{w}$ נקבל $Cw\bar{w} + B\bar{w} + \bar{B}w + A = 0$ - שוב מעגל מוכלל (שיהיה ישר אם $C = 0$).

3.2.1 הגדרה:

העתקת מביוס (Möbius transformation) היא עתקה $T: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ מהצורה $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ עבור $\mathbb{C} \ni d, c, b, a$ כך ש- $ad - bc \neq 0$. T כזאת נקראית לעיתים גם העתקה לינארית שברית (linear fractional mapping) - 'הש' תרג' 2.3.2.

3.2.2 התכונות הבסיסיות של העתקות מביוס:

- (1) הזזה והיפוך במעגל הן העתקות מביוס.
- (2) הרכבה של העתקות מביוס היא העתקת מביוס.
- (3) העתקת מביוס T מעבירה מעגל מוכלל ב- $\hat{\mathbb{C}}$ למעגל מוכלל.
- (4) להעתקת מביוס נתונה T , שאינה הזהות, יש לכל היותר שתי נקודות שבת שונות (כלומר, יש לכל היותר שתי נקודות z ב- $\hat{\mathbb{C}}$ כך ש- $T(z) = z$).
- (5) העתקת מביוס הקובעת שלוש נקודות שונות ב- $\hat{\mathbb{C}}$ היא הזהות.
- (6) כל העתקת מביוס הפיכה, וההופכי גם הוא העתקת מביוס.

הוכחה:

- (1) הזזה המתקבלת עבור $c = 0$ ו- $a = d$; היפוך מתקבל עבור $a = d = 0$, $b = c = 1$.
- (2) תרגיל.
- (3) אפשר להציג כל העתקת מביוס כהרכבה של היפוכים והזזות, ואז להשתמש במה שהראינו לעיל.
- (4) אם z נקודת שבת של T , אז $z = \frac{az+b}{cz+d}$, כלומר $cz^2 + (d-a)z - b = 0$, ולכן z הוא שורש של משוואה ממעלה ≥ 2 , ויש לכל היותר שתיים כאלה.
- (5) שקול ל-(4).

(6) ההופכי של $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ הוא $S(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$

3.2.3 טענה:

לכל שתי שלשות סדורות (z_1, z_2, z_3) ו- (z_1, z_2, z_3) של נקודות שונות ב- $\hat{\mathbb{C}}$, קיימת העתקת מביוס אחת ויחידה T כך ש- $T(z_i) = w_i$ ל- $i = 1, 2, 3$.

הוכחה: לפי תכונות (2) ו-(6) לעיל, מספיק להראות שניתן להעביר כל שלשה (z_1, z_2, z_3) לשלשה $(1, 0, \infty)$, וזאת באמצעות העתקת המביוס המוגדרת:

$$(7) \quad T_{(z_1, z_2, z_3)}(z) := \frac{(z - z_2)(z_1 - z_3)}{(z - z_3)(z_1 - z_2)}$$

□ היחידות נובעת מתכונה (5) לעיל.

3.2.4 מסקנה:

לכל שני מעגלים מוכללים C_1 ו- C_2 ב- $\hat{\mathbb{C}}$, ישנה העתקת מביוס (לא יחידה) המעבירה את C_1 על C_2 .

□ הוכחה: זה נובע מטענה 3.2.3 ומתכונה (3) לעיל.

3.2.5 הגדרה:

היחס המרובע (cross ratio) של ארבע הנקודות שונות (z_0, z_1, z_2, z_3) ב- $\hat{\mathbb{C}}$ מוגדר להיות:

$$[z_0, z_1; z_2, z_3] := \frac{(z_0 - z_2)(z_1 - z_3)}{(z_0 - z_3)(z_1 - z_2)}$$

(הש' הגדרה 2.1.1).

3.2.6 הערה

שימו לב ש- $[z_1, z_2; z_3, z_4]$ הוא בדיוק $T_{(z_1, z_2, z_3)}(z_4)$, כאשר $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} : T_{(z_1, z_2, z_3)}$ העתקת המביוס של (7). מכאן שזהו מספר מרוכב סופי שונה מ-0 ו-1 גם אם אחד מבין $\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ הוא ∞ .

3.2.7 טענה

כל העתקת מביוס $S : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ שומרת על היחס המרובע של כל ארבע נקודות שונות ב- $\hat{\mathbb{C}}$ (z_0, z_1, z_2, z_3) .

הוכחה: על-ידי הרכבה של העתקת המביוס $T_{(z_1, z_2, z_3)}$ של (7) עם S^{-1} , נקבל העתקת מביוס $U := T_{(z_1, z_2, z_3)} \circ S^{-1}$ המעבירה את השלשה $(S(z_1), S(z_2), S(z_3))$ לשלשה $(1, 0, \infty)$ (בסדר זה), ולכן לפי הערה 3.2.6 היחס המרובע של הנקודות $(S(z_0), S(z_1), S(z_2), S(z_3))$ שווה ל-

$$\square \quad [S(z_0); S(z_1); S(z_2); S(z_3)] = U(S(z_0)) = T_{(z_1, z_2, z_3)}(z_0) = [z_1, z_2; z_3, z_4]$$

3.2.8 טענה

ארבע נקודות שונות (z_0, z_1, z_2, z_3) ב- $\hat{\mathbb{C}}$ נמצאות על אותו מעגל מוכלל אם ורק אם היחס המרובע שלהן $[z_1, z_2; z_3, z_4]$ ממשי.

הוכחה: אם נסמן ב- C את המעגל המוכלל ב- $\hat{\mathbb{C}}$ העובר דרך שלוש הנקודות z_1, z_2, z_3 , אז $T_{(z_1, z_2, z_3)}$ מעבירה את C למעגל המוכלל העובר דרך $0, 1, \infty$ - כלומר, ל- $\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. לכן $z_0 \in C$ אם ורק אם $T_{(z_1, z_2, z_3)}(z_0) \in T_{(z_1, z_2, z_3)}(C) = \hat{\mathbb{R}}$ מכיון שהערך ∞ כבר תפוס על-ידי $T_{(z_1, z_2, z_3)}(z_3)$, זה קורה אם ורק אם $[z_1, z_2; z_3, z_4] = T_{(z_1, z_2, z_3)}(z_4)$ הוא מספר ממשי (סופי). \square

הערה: גם השיקוף בציר ה- x - בכתוב מרוכב: ההעתקה $R(z) = \bar{z}$ - מעביר מעגל מוכלל למעגל מוכלל.

3.2.9 הגדרה:

העתקת מביוס צמודה (conjugate Möbius transform) היא הרכבה של העתקת מביוס עם שיקוף כנ"ל - כלומר, העתקה מן הצורה:

$$T(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

עבור $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ כך ש- $ad - bc \neq 0$. העתקת מביוס מוכללת (generalized Möbius transform) היא העתקת מביוס רגילה או צמודה.

מכיון שאנחנו מעוניינים במודל פואנקארה \mathbb{H} של חצי המישור העליון, ולא ב- \mathbb{C} כולו, נזדקק למושג הבא:

3.2.10 הגדרה:

העתקת מביוס מוכללת המעתיקה את \mathbb{H} ל- \mathbb{H} - כלומר, $T(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ - נקראית טרנספורמציה היפרבולית (hyperbolic transformation) של המישור.

3.2.11 משפט:

טרנספורמציות היפרבוליות של המישור הן מן הצורה:

$$\begin{aligned} (ad - bc = 1, \mathbb{R} \ni d, c, b, a) \quad T(z) &= \frac{az + b}{cz + d} \\ (ad - bc = -1, \mathbb{R} \ni d, c, b, a) \quad T(z) &= \frac{ia\bar{z} + ib}{ic\bar{z} + id} \quad \text{או:} \end{aligned}$$

הוכחה: תהי $T: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ טרנספורמציות היפרבוליות. מטעמי רציפות T גם מעבירה את השפה של \mathbb{H} - כלומר, הציר הממשי $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) = 0\}$ - לעצמו, ולכן גם את הישר הממשי המורחב $\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ לעצמו.

שימו לב שאם $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, זה יהיה נכון גם אחרי הצמדה, ולכן מספיק לזהות את העתקות מביוס הרגילות, מהצורה $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $(ad - bc = 1, \mathbb{C} \ni d, c, b, a)$ המקיימות: $T(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$. נבדוק תחילה שני מקרים מיוחדים:

(א) אם $c = 0$, אז $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ ($ad = 1$) - כלומר, T היא העתקה אפינית מרוכבת (הפיכה), שהינה הרכבה של סיבוב, מתיחה, והזזה. כדי שיתקיים $T(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$ חייבים המקדמים $\frac{a}{d}$ ו- $\frac{b}{d}$ להיות ממשיים.

(ב) אם $a = 0$, אז $T(z) = J(\frac{c}{b}z + \frac{d}{b})$, ומכיוון שהופכי $1/w$ של מספר מרוכב הוא ממשי אם ורק אם w ממשי, הרי שעלינו לדאוג לכך שההעתקה הלינארית $z \mapsto \frac{c}{b}z + \frac{d}{b}$ תשמור על $\hat{\mathbb{R}}$, וזה מחייב שהמקדמים $\frac{c}{b}$ ו- $\frac{d}{b}$ שוב יהיו ממשיים.

(ג) עתה נניח ש- $c \neq 0$, $a \neq 0$. מכיוון ש- $T(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$ בפרט $T^{-1}(0) = -\frac{b}{a}$, $T(\infty) = \frac{a}{c}$ ו- $T^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$ הם ב- $\hat{\mathbb{R}}$. אף אלה הן נקודות ממשיות $\neq \infty$, ולכן:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)cz - \left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{c}\right)c}{cz - \left(-\frac{d}{c}\right)c} = \frac{T(\infty)cz - T^{-1}(0)T(\infty)c}{cz - T^{-1}(\infty)c}$$

יחד עם התנאי ש- $ad - bc = 1$ נקבל $1 = c^2[T(\infty)(T^{-1}(0) - T^{-1}(\infty))]$, ולכן $\mathbb{R} \ni c$ או $i\mathbb{R} \ni c$. מכאן שמקדמי T כולם ממשיים או כולם מדומים טהורים (כלומר, ב- $i\mathbb{R}$).

(ד) הראינו שהעתקת מביוס מוכללת שבה כל המקדמים ממשיים או כולם מדומים טהורים מעבירה את $\partial\mathbb{H} = \hat{\mathbb{R}}$ לעצמו. כדי שיתקיים $T(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$, מספיק לבדוק נקודה אחת מתוך \mathbb{H} , כי ברור (שוב מטעמי רציפות) ש- $T(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ או $T(\mathbb{H}) = \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{H}}$ (חצי המישור התחתון). ואכן אם $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $\mathbb{R} \ni d, b, c, a$ -1 ו- $ad - bc = 1$, נמצא:

$$T(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = \frac{(ai+b)(d-ci)}{(d+ci)(d-ci)} = \frac{(bd+ac) + i(ad-bc)}{c^2+d^2}$$

ומכיוון ש- $c^2 + d^2 > 0$ ו- $ad - bc = 1$, נמצא שהחלק המדומה של $T(i)$ חיובי, כלומר $T(i) \in \mathbb{H}$.

באופן דומה אם $T(z) = \frac{ia\bar{z}+ib}{ic\bar{z}+id}$, $\mathbb{R} \ni d, b, c, a$ -1 ו- $ad - bc = -1$, נמצא:

$$T(i) = \frac{i(-ai+b)}{i(-ci+d)} = \frac{(b-ai)(d+ci)}{(d-ci)(d+ci)} = \frac{(bd+ac) - i(ad-bc)}{c^2+d^2}$$

ומכיוון ש- $c^2 + d^2 > 0$ ו- $ad - bc = -1$, נמצא שהחלק המדומה של $T(i)$ חיובי, כלומר $T(i) \in \mathbb{H}$.

בשני המקרים הנותרים נמצא ש- $T(i) \notin \mathbb{H}$, ולכן לא קבלנו העתקה היפרבולית. \square

הערה: בעזרת העתקות כאלה אפשר להעביר כל "ישר" L_1 ב- \mathbb{H} (כלומר, חצי מעגל מוכלל, הניצב לציר ה- x) לכל "ישר" נתון אחר, באופן שנקודה נבחרת $L_1 \ni z_1$ תעבור לנקודה נבחרת $L_2 \ni z_2$.

כמוכן, שתי נקודות הקצה הנתונות ב- $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ עוברות לנקודות הקצה של L_2 ב- $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, כך שבעצם אנו מעבירים גם את זוג הקרניים שנקבעות על-ידי z_1 לזוג הקרניים הנקבעות על-ידי z_2 , באיזה סדר שנרצה.

3.2.12 התכונות נוספות של העתקות מביוס מוכללות:

1. כל העתקת מביוס מוכללת היא רציפה (כהעתקות מן המישור האוקלידי \mathbb{R}^2 לעצמו).
2. כל העתקת מביוס מוכללת היא קונפורמית - כלומר, שומרת על זוויות.
3. כל העתקה רציפה, חד-חד-ערכית מ- $\hat{\mathbb{C}}$ על $\hat{\mathbb{C}}$, המעבירה מעגל מוכלל למעגל מוכלל, היא העתקת מביוס מוכללת.

הוכחה:

1. כל פונקציה אנליטית היא גזירה, ולכן רציפה.
2. שוב, זו תכונה של פונקציה אנליטית $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ - היא מסובבת כל קרן היוצאת מנקודה נתונה z_0 בזווית של $\arg(f'(z_0))$.
3. ראו [2, Theorem 2.21].

□

הערה: אם מזהים את S^2 עם הספירה של רימאן $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (ר' הערה 3.1.1), הרי שנוכל לתאר את הסיבובים של S^2 (המתאימות למטריצות האורתוגונאליות המיוחדות ב- $\{SO_3 := \{A \in O_3 : \det(A) = 1\}\}$) כהעתקות מביוס מן הצורה:

$$T(z) = \frac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}} \quad \text{כאשר } a^2 + b^2 = 1$$

ואילו הטרנספורמציות הספיריות שהן שיקופים במישור $\{ax + by + cz = 0\}$ (עבור c, b, a ב- \mathbb{R} עם $a^2 + b^2 + c^2 = 1$), מתוארות גם הן בכתיב מרוכב כהעתקות מביוס, הפעם מן הצורה:

$$T(z) = \frac{(a - ib)\bar{z} - c}{-c\bar{z} - (a - ib)}$$

לכן טבעי לצפות לכך שאחת הצורות הבסיסיות הנשמרות תחת העתקות אלה תתואר ב- $\hat{\mathbb{C}}$ כמעגל מוכלל (ר' הערה 3.1.1), מה שמסביר את הגדרה 1.3.1 לעיל.

3.3 מידת האורך ההיפרבולית

כאמור, מודל פואנקארה למישור ההיפרבולי מקיים בבירור את יחסי החילה והסדר הרגילים, ובנוסף את אכסיומת המקבילים ההיפרבולית (ר' לעיל). אולם חסר לנו בינתיים מושג של "אורך", שיאפשר לנו לוודא שגם יחסי החפיפה הרגילים מתקיימים במודל זה.

כזכור, מושג החפיפה האוקלידי מוגדר בעזרת המושג האינטואיטיבי של "הזזת" צורה אחת בצורה שתחפוף לצורה אחרת: ואכן במודל האנליטי הרגיל למישור האוקלידי (\mathbb{R}^2), ניתן לבצע "הזזות" כאלה על-ידי ביצוע סיבובים, שיקופים, והזזות כיווניות - אשר לכולם יש תיאור אנליטי פשוט בעזרת מטריצות ווקטורים.

3.3.1 הערה:

אם נרצה להגדיר "הזזות" (טרנספורמציות היפרבוליות) מתאימות במודל פואנקארה למישור ההיפרבולי, בוודאי נרצה שהן תשמורנה על ה"ישרים" שלנו - כלומר, יעבירו מעגל מוכלל למעגל מוכלל - ושהן תהיינה רציפות, ולכן מן האמור ב-3.2.12 (4), הן חייבות להיות העתקות מביוס (מוכללות). לכן נרצה להגדיר מושג של "מרחק היפרבולי" (במודל \mathbb{H}) באופן שיישמר על-ידי העתקות מביוס.

בעצם, מכיוון שלפי מסקנה 3.2.4 אפשר להעביר כל "ישר" ב- \mathbb{H} לכל "ישר" אחר, מספיק להגדיר את המרחקים על ישר היפרבולי אחד - למשל, על הקרן $L := \{it : t > 0\}$. אך גם על \mathcal{L} נרצה שהמרחק יישמר על-ידי העתקות מביוס, וכל $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ הלוקח את \mathcal{L} ל- \mathcal{L} בפרט מעביר 0 ל-0 ו- ∞ ל- ∞ (שני הקצוות) - או להיפך. לכן צורתו היא $T(z) = az$ אם נקבע באופן שרירותי שהקטע $[i, ie]$ ב- \mathcal{L} יהיה באורך 1, הרי שגם הקטע $[ia, iae]$ יהיה באורך 1 לכל $a \in \mathbb{R}_+$ ממשי חיובי. מכאן אנו רואים שמה שמתאים לשריג החד-מימדי \mathbb{Z} בישר האוקלידי ב- \mathbb{R} הוא:



(או כל הזזה המתקבלת מכפל בקבוע ממשי חיובי a).

מכאן שהמרחק ההיפרבולי בין $i\lambda$ ל- $i\mu$ ב- \mathcal{L} (עבור $0 < \lambda < \mu$) צריך להיות

$$(8) \quad d_{\mathbb{H}}(i\lambda, i\mu) := \ln\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)$$

(וכמובן יכולנו להכפיל זאת בכל קבוע חיובי שנרצה).

נוסחה (8) קובעת את המרחק ההיפרבולי בין כל שתי נקודות z_1 ו- z_2 ב- \mathbb{H} , באופן הבא:

(א) מוצאים את ה"ישר" (=חצי מעגל מוכלל) היחיד Γ שעובר ביניהם.

(ב) מוצאים את הקצוות z_1, z_0 בהתאמה של Γ ב- $\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ באופן שהסדר הוא $z_0 < z_1 < z_2 < z_3$ (עם כיוון השעון, אם מדובר בחצי מעגל, או מלמטה למעלה, אם מדובר בקרן ניצבת ל- \mathbb{R}).

(ג) מוצאים את העתקת מביוס (המוכללת) היחידה $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ כך ש- $T(z_0) = 0$ ו- $T(z_1) = i$, $T(z_3) = \infty$ (זוהי בעצם $T = iT_{(z_1, z_0, z_3)}^{-1}$), בסימונים של נוסחא (7).

(ד) אז בהכרח $T(z_2) \in \mathcal{L}$, כלומר $T(z_2) = i\mu$ עבור איזשהו $\mu \in \mathbb{R}$, ונקבע: $d_{\mathbb{H}}(z_0, z_1) := \ln |\mu|$

3.3.2 טענה

בסימונים לעיל $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \ln([z_2, z_1; z_0, z_3])$

הוכחה: אם $\Gamma = \mathcal{L}$ היא הקרן החיובית של הציר המדומה, עם $z_2 = ti$, $z_1 = i$, $z_0 = 0$ ו- $z_3 = \infty$, אז לפי (8) נמצא:

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \ln t = \ln \left(\frac{(it - 0)(i - \infty)}{(it - \infty)(i - 0)} \right) = \ln([it, i; 0, \infty]) = \ln([z_2, z_1; z_0, z_3])$$

עתה ל- Γ כללית, העתקת המבויס $iT_{(z_1, z_0, z_3)}^{-1}$ המעבירה את \mathcal{L} ל- Γ ובפרט את הרביעיה הסדורה $(0, i, it, \infty)$ ל- (z_0, z_1, z_2, z_3) היא איזומטריה היפרבולית, ולכן היא שומרת גם על היחס המרובע (לפי טענה 3.2.7) וגם על המרחק ההיפרבולי (לפי ההגדרה). \square

3.3.3 הגדרה:

במודל \mathbb{H} נאמר שהקטע $z_0 z_1$ חופף (congruent) לקטע $w_0 w_1$ (סימון: $\overline{z_0 z_1} \equiv \overline{w_0 w_1}$) אם $d_{\mathbb{H}}(z_0, z_1) = d_{\mathbb{H}}(w_0, w_1)$ ונסמן כמובן $z_0 * z_1 * z_2$ אם הנקודות z_2, z_1, z_0 נמצאות על אותו "ישר" (חצי-מעגל מוכלל) בסדר הנתון.

3.3.4 למה:

עבור $\mathbb{H} \ni z_1, z_0, w_1, w_0$ מתקיים $\overline{z_0 z_1} \equiv \overline{w_0 w_1}$ אם ורק אם ישנה העתקת מבויס (מוכללת) $T: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ כך ש- $T(z_0) = w_0$ ו- $T(z_1) = w_1$.

הוכחה: נובע מההגדרה של $d_{\mathbb{H}}$ לעיל, ומיחידות העתקת מבויס המעבירה שלשת נקודות נתונה לשלשה אחרת (טענה 3.2.3).

3.3.5 הגדרה:

אם γ עקום חלר בחתי המישור העליון, הנתון באופן פרמטרי על-ידי פונקציה $\mathbf{v} = (x, y): [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$, האורך ההיפרבולי (hyperbolic length) שלו הוא:

$$(9) \quad L_{\mathbb{H}}(\gamma) := \int_a^b \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

3.3.6 טענה:

אם γ הוא חלק סופי של ישר היפרבולי (חצי מעגל מוכלל ב- \mathbb{H}), אז האורך של γ שווה למרחק ההיפרבולי בין נקודות הקצה שלו: $L_{\mathbb{H}}(\gamma) = d_{\mathbb{H}}(\mathbf{v}(a), \mathbf{v}(b))$.

הוכחה: ר' [Stahl, Theorem 4.7]. \square

3.3.7 הערה:

ישנו מודל אחר למישור ההיפרבולי \mathbb{H} , הדומה מאוד באופן פורמאלי לגיאומטריה הספירית (סעיף 1.3): נגדיר את במישור ההיפרבולי

$$\mathcal{H}^2 := \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid -t^2 + x^2 + y^2 = -1, t > 0\}$$

להיות היריעה העליונה של ההיפרבולואיד הדו-יריעתי (עם הפרמטריזציה $(t = \sqrt{1 + x^2 + y^2})$.
 אנו רואים שזה אנאלוגי לספירה S^2 , עם הפרמטריזציה המקומית $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. גם
 המטריקה המתקבלת דומה:

$$(10) \quad , d_H(P, Q) := \operatorname{arccosh}(-P \cdot_L Q)$$

כאשר כזכור $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ ולכן $(\sinh t)' = \cosh t$ ו- $(\cosh t)' = \sinh t$.
 המכפלה הפנימית הלורנצית ב- \mathbb{R}^3 מוגדרת:

$$(t_1, x_1, y_1) \cdot_L (t_2, x_2, y_2) := t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2$$

כמו בגיאומטריה הספירית, אפשר לפתח תורה של טריגונומטריה היפרבולית (זהו בעצם
 מקור הפונקציות \cosh ו- \sinh), ולהוכיח את האנאלוג הבא של טענה 1.3.5:

3.3.8 טענה:

אם $\triangle PQR$ משולש ב- \mathcal{H}^2 , ו- $\alpha = d_H(Q, R)$, $\beta = d_H(P, Q)$, ו- $\gamma = d_H(P, R)$ הזוויות
 המרכזיות המתאימות, אז

$$\cosh \alpha = \cosh \beta \cosh \gamma - \sinh \beta \sinh \gamma \cos \alpha$$

□

הוכחה: תרגיל.

3.4 תרגילים לפרק 3

3.4.1 מצא/י את כל העתקות המביוס T המעבירות את הקבוצה $\{0, 1, \infty\}$ לעצמה (בלי
 לשמור על הסדר).

3.4.2 הראה/י שהרכבה של העתקות מביוס היא העתקת מביוס.

3.4.3 האם ארבע הנקודות $\{2 + 3i, -2i, 1 - i, 4\}$ שייכות למעגל מוכלל אחד?

3.4.4 עבור אילו מספרים ממשיים t ארבע הנקודות $\{2 + 3i, -2i, 1 - i, t\}$ שייכות למעגל

מוכלל אחד?

3.4.5 הראה/י שאם $T(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ עבור $\mathbb{C} \ni d, b, c, a$ כך ש- $ad - bc = 0$, אז T איננה חד-חד ערכית.

3.4.6 מצא/י העתקות מביוס שנקודות השבת שלהן הן:

(א) -3 (נקודת שבת כפולה).

(ב) 5 ו-7.

(ג) $1 + i$ (ועוד אחת).

3.4.7 הראה/י שכל העתקת מביוס מוכללת שומרת אף היא על היחס המרובע $[z_1; z_2; z_3; z_4]$.

3.4.8 הראה/י שלכל ארבע נקודות שונות $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ ב- $\hat{\mathbb{C}}$ יש מספר מרוכב w והעתקת

מביוס T המעבירה את z_1, \dots, z_4 בהתאמה ל- $1, -1, w, -w$.

3.4.9 הראה/י באופן גיאומטרי שארבע נקודות שונות ב- $\hat{\mathbb{C}}$ נמצאות על אותו מעגל מוכלל

אם ורק אם היחס המרובע שלהן ממשי, על-ידי חישוב $\arg([z_1; z_2; z_3; z_4])$.

3.4.10 הוכח/י את טענה 3.3.8.

3.4.11 הראה/י שהעתקת מביוס מן הצורה $z \mapsto \frac{\cos \theta z + \sin \theta}{-\sin \theta z + \cos \theta}$ היא סיבוב היפרבולי בזווית

2θ סביב i .

3.4.12 הראה/י בעזרת תרגיל 3.4.11 שאם נסמן $T(z) := bz + a$, אז העתקת מביוס מן

הצורה:

$$z \mapsto T \left(\frac{\cos \theta \cdot T^{-1}(z) + \sin \theta}{-\sin \theta \cdot T^{-1}(z) + \cos \theta} \right)$$

היא סיבוב היפרבולי בזווית 2θ סביב הנקודה $ai + b$.

3.4.13 יהיו $z_1 = (x, y_1)$ ו- $z_2 = (x, y_2)$ שתי נקודות על קרן Γ ב- \mathbb{H} מאונכת לציר ה- x (עם

$0 < y_1 \leq y_2$). הראה/י (ישירות מהג' 3.3.3 או בעזרת טענה 3.3.6) ש- $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \ln \frac{y_2}{y_1}$.

3.4.14 יהי Γ חצי מעגל ב- \mathbb{H} בעל רדיוס R ומרכז $c := (x_0, 0)$, ו- z_1, z_2 שתי נקודות על Γ

כך ש- $\arg(z_2 - c) = \beta$ ו- $\arg(z_1 - c) = \alpha$ (הזוויות של הרדיוסים עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , עם $\alpha < \beta$). הראה/י בעזרת טענה 3.3.6 ש-

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \ln \left(\frac{\csc \beta - \cot \beta}{\csc \alpha - \cot \alpha} \right)$$

3.4.15 אפשר להגדיר פעולה של היפוך במעגל (inversion in a circle) בגיאומטריה של

המישור האוקלידי:

אם C מעגל ב- \mathbb{R}^2 עם מרכז Q ורדיוס r , נגדיר $T = T_C : \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ כך: $T(Q) = \infty$, $T(\infty) = Q$, ואם $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \{Q\}$ אז $T(P) = P'$ כאשר P' הנקודה על הקו \overline{QP} המקיימת: $|QP| \cdot |QP'| = r^2$. פעולה זו מכלילה את השיקוף בישר. הוכח/י (בעזרת משפטים ידועים של הנדסת המישור):

(א) היפוך במעגל הופך כיוון, אך שומר על זוויות.

(ב) היפוך במעגל מעתיק כל מעגל מוכלל ב- $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ למעגל מוכלל ב- $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$.

(ג) ניתן לייצג כל היפוך במעגל על-ידי העתקת מביוס $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ (אילו העתקות מביוס מייצגות היפוכים כאלה?).

3.4.16 הראה/י שהעתקת המביוס $U(z) := \frac{iz+1}{z+i}$ מעתיקה את חצי-המישור העליון \mathbb{H} על

עיגול היחידה $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

3.4.17 הראה/י בעזרת תרגיל 3.4.16 שגם עיגול היחידה D הוא מודל (קונפורמי) של הגיאומטריה ההיפרבולית, שבה ה"ישרים" הם קטרים או קשתות של מעגלים הניצבים למעגל היחידה (השפה של D).

3.4.18 הראה/י שבמודל עיגול היחידה לגיאומטריה ההיפרבולית (תרג' 3.4.17) האיזומטריות הן העתקות מביוס מוככלות מהצורה:

$$z \mapsto \frac{az + \bar{b}}{bz + \bar{a}} \quad \text{או} \quad z \mapsto \frac{-a\bar{z} + \bar{b}}{-b\bar{z} + \bar{a}}$$

עבור $b, a \in \mathbb{C}$ עם $|a| > |b|$.

3.4.19 הראה/י שבמודל עיגול היחידה לגיאומטריה ההיפרבולית (תרג' 3.4.17) חבורת האיזו-מטריות נוצרת על-ידי ההיפוכים במעגלים (תרג' 3.4.15).

3.4.20 הראה/י אפשר להעביר כל נקודה בעיגול היחידה הפתוח D לכל נקודה אחרת על-ידי הרכבה של לכל היותר שני היפוכים במעגלים (תרג' 3.4.15), והסק/י שחבורת האיזומטריות ההיפרבוליות (תרג' 3.4.18) פועלת על D באופן טרנזיטיבי. מהו המייצב של נקודה $Q \in D$?

הערה: כזכור אם חבורה G פועלת על קבוצה X (הג' 1.0.1), המייצב (stabilizer) של נקודה $x \in X$ הוא תת-החבורה $\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g(x) = x\}$ של G .

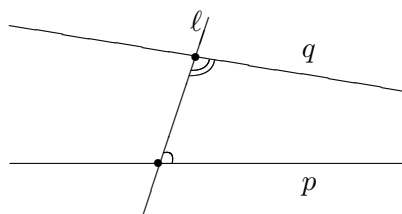
3.4.21 הראה/י שאם ארבע הנקודות z_1, z_2, z_3, z_4 נמצאות על מעגל C , השלשה הסדורה (z_1, z_2, z_3) קובעת את אותו כיוון על המעגל כמו השלשה הסדורה (z_2, z_3, z_4) אם ורק אם היחס המרובע $[z_1; z_2; z_3; z_4]$ חיובי.

4 גיאומטריה אכסיומאטית

במשך אלפיים שנים התבססה הגיאומטריה על ה"יסודות" של אוקלידס, אשר ניסח את כל תורת הגיאומטריה על מספר קטן של אכסיומות, שמהן אפשר היה להסיק את שאר המשפטים באופן לוגי. למרות חסרים מסויימים במערכת של אוקלידס, היא שימשה את המתמטיקאים היטב עד המאה ה-19, ואולם רבים הוטרדו מכך ש"אכסיומת המקבילים" של אוקלידס לא נראתה מובנת מאליה כמו שאר האכסיומות:

הפוסטולאט החמישי (אכסיומת המקבילים של אוקלידס):

אם ישר ℓ החותך שני ישרים $p \neq q$, יוצר זוויות פנימיות באותו צד, שסכומן קטן משתי זוויות ישרות, אז שני הישרים, אם נמשיכם בלי הגבלה, ייפגשו באותו צד בו הזוויות קטנות משתי זוויות ישרות.



לכן ניסו מתמטיקאים רבים, עוד בימי קדם, למצוא לה הוכחה כמשפט הנובע מן האכסיומות האחרות, וכאמור לעיל, רק בראשית המאה ה-19 הבינו גאוס, לובאצ'בסקי ובוויאי שהדבר בלתי אפשרי מבחינה לוגית, ושניתן לפתח גיאומטריה חדשה, עקבית לחלוטין, אם מחליפים את אכסיומת המקבילים של אוקלידס בשלילתה, הנקראית "אכסיומת המקבילים ההיפר-בולית".

אנו נתרכז תחילה בשתי הדוגמאות החשובות ביותר של הגיאומטריות האכסיומאטיות: הגיאומטריה האוקלידית המוכרת, והגיאומטריה ההיפרבולית (הלא-אוקלידית). בשלב ראשון נראה כיצד ניתן לתאר את שתיהן באופן אכסיומאטי, בגישה המקורית של אוקלידס.

כפי שציינו, במהלך השנים התגלו חסרים מסויימים במערכת האכסיומות המקורית של אוקלידס - בעיקר משום שהוא לא ראה בה מערכת לוגית מופשטת, אלא נסיון לתאר את העולם הפיזי שבו אנו חיים. משום כך הסתמך בהוכחותיו על ציורים, מה שפגע בדיוק הלוגי שלהן.

במהלך המאה ה-19 נעשו נסיונות שונים להשלים חסרים אלה במערכת של אוקלידס, וב-1898 ניסח הילברט (David Hilbert [1862-1945]) אכסיומות לגיאומטריה האוקלידית, שמהן ניתן לפתח את כל הנדסת המרחב, על-ידי היסק לוגי בלבד, בלי להשתמש בהנחות סמויות.

4.1 מושגים ראשוניים לגיאומטריה האכסיומאטית

בכל מערכת אכסיומאטית ישנם מושגים מסויימים שאינם ניתנים להגדרה. אם תרצו, אפשר לראות באכסיומות עצמן הגדרה של המושגים: מותר לנו לקרוא בשמות אלה לכל מערכת

של עצמים המקיימים את האכסיומות (כך קורה בהגדרה של "חבורה" או "שדה" באלגברה, אן של "מרחב טופולוגי"). במקרה של הנדסת המישור בחר הילברט, בהמשך למסורת של אוקלידס, להשתמש ברשימה הבאה של "מושגים ראשוניים" (למרות שמבחינה לוגית ניתן היה להסתפק בפחות):

1. נקודות (יסומנו באותיות לטיניות גדולות: $(A, B, \dots, P, Q, \dots)$).
2. ישרים (יסומנו באותיות לטיניות קטנות: $(a, b, \dots, k, \ell, \dots)$).
3. חילה הנקודה P שייכת לישר ℓ , או P על ℓ (יסומן: $P \in \ell$).
4. סדר הנקודה B נמצאת בין הנקודות A ו- C (יסומן: $A * B * C$).
5. חפיפה הקטע בין A ו- B חופף לקטע בין C ו- D (יסומן: $AB \cong CD$).

4.1.1 הגדרות:

בעזרת המושגים הראשוניים ניתן להגדיר מושגים רבים אחרים. אם תרצו, אפשר לחשוב על הגדרות אלה כקיצורים בלבד: מבחינה לוגית, בכל פעם שמופיע המושג המוגדר כאן בהמשך, ניתן להחליפו בהגדרה הניתנת כאן.

1. נאמר ששלוש הנקודות A, B ו- C אינן על ישר אחד (סימון: $\sim \text{Coll}(A, B, C)$) אם אין ישר ℓ כך ש- $A \in \ell$ וגם $B \in \ell$ וגם $C \in \ell$.
2. נאמר שהישר k מקביל לישר ℓ אם אין נקודה P כך ש- $P \in k$ וגם $P \in \ell$, ונסמן: $k \parallel \ell$.
3. יהא ℓ ישר ו- A, B נקודות שאינן על ℓ ($A \notin \ell$ ו- $B \notin \ell$):

א. אם קיימת נקודה $C \in \ell$ כך ש- $A * C * B$, נאמר ש- A ו- B מופרדות על ידי ℓ , ונסמן: $A * \ell * B$.

ב. אם אין נקודה $C \in \ell$ כך ש- $A * C * B$, נאמר ש- A ו- B נמצאות מאותו צד של ℓ , ונסמן: $AB * \ell$.

4. אם A ו- B שתי נקודות שונות ($A \neq B$), הקטע מ- A ל- B הוא אוסף הנקודות:

$$. AB = \{C \mid C = A \text{ או } C = B \text{ או } A * C * B\}$$

5. אם A ו- B שתי נקודות שונות ($A \neq B$), הקרן מ- A ל- B היא אוסף הנקודות:

$$. \overrightarrow{AB} = \{C \mid C = A \text{ או } A * C * B \text{ או } C = B \text{ או } A * B * C\}$$

6. נאמר שהישר ℓ חותך את הקטע AB אם קיימת נקודה C כך ש- $C \in \ell$ וגם $C \in AB$.
 (באופן דומה נגדיר: "הקרן \overrightarrow{PQ} חותכת את הקטע AB ", וכדומה).

7. נאמר שהקטע AB גדול מהקטע CD (סימון: $AB > CD$) אם יש נקודה E כך ש- $A * E * B$ ו- $AE \cong CD$.

8. נאמר שהקרן \overrightarrow{AC} נמצאית בין הקרן \overrightarrow{AB} והקרן \overrightarrow{AD} אם $\text{Coll}(A, B, C) \sim \text{Coll}(A, B, C)$ ומתקיים: $BC * \ell(AD)$ וגם $CD * \ell(AB)$. במקרה זה נאמר גם שהנקודה C פנימית לזווית $\angle BAD$.

שים לב: אין צורך להגדיר את המושג "זווית".

9. נאמר שהזווית $\angle ABC$ חופפת לזווית $\angle DEF$ (נסמן: $\angle ABC \cong \angle DEF$) אם מתקיים אחד משני התנאים הבאים:

א. $A * B * C$ וגם $D * E * F$ (במקרה זה נאמר שהזווית $\angle ABC$ שטוחה); או:

ב. $\text{Coll}(A, B, C) \sim \text{Coll}(D, E, F)$ וקיימות נקודות $A' \in \overrightarrow{ED}$, $C' \in \overrightarrow{EF}$ כך ש- $BA \cong EA'$, $BC \cong EC'$ ו- $AC \cong A'C'$.

10. נאמר ש- $\angle ABC$ זווית ישרה אם $\text{Coll}(A, B, C) \sim \text{Coll}(A, B, C)$ וקיימת נקודה D כך ש- $A * B * D$ ו- $\angle ABC \cong \angle DBC$.

במקרה זה נאמר גם שהישר $\ell(A, B)$ מאונך לישר $\ell(B, C)$, ונסמן: $\ell(B, C) \perp \ell(A, B)$.

11. נאמר שהזווית $\angle ABC$ גדולה מהזווית $\angle DEF$ (סימון: $\angle ABC > \angle DEF$) אם יש נקודה G כך שהקרן \overrightarrow{BG} נמצאית בין הקרן \overrightarrow{BA} והקרן \overrightarrow{BC} , ו- $\angle ABG \cong \angle DEF$.

12. נאמר שהמשולש $\triangle ABC$ חופף למשולש $\triangle DEF$ (סימון: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$) אם $\text{Coll}(A, B, C) \sim \text{Coll}(A, B, C)$ ו- $AB \cong DE$, $AC \cong DF$ ו- $BC \cong EF$. (שוב, איננו מגדירים את המושג "משולש").

13. נאמר שהמשולש $\triangle ABC$ דומה למשולש $\triangle DEF$ (סימון: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$) אם $\text{Coll}(A, B, C) \sim \text{Coll}(A, B, C)$ ו- $\angle ABC \cong \angle DEF$, $\angle BCA \cong \angle EFD$ ו- $\angle ACB \cong \angle DFE$.

4.2 האכסיומות של הילברט

הילברט חילק את האכסיומות שלו לחמש קבוצות, שבהן הראשונה, השלישית, והחמישית כוללות את האכסיומות המקוריות של אוקלידס, בשינויים קלים, ואילו הקבוצה השניה והרביעית הן אכסיומות חדשות, האמורות להשלים את החסרים שניתגלו לאורך השנים.

המערכת המקורית של הילברט התייחסה למרחב האוקלידי, ולא למישור, ולכן נעשו כאן שינויים מסויימים. בכל מקרה גם בניסוח הקיים ישנה עודפות מסויימת - ניתן היה לנסח את האכסיומות בצורה חסכנית יותר, אך פחות נוחה לשימוש, או פחות שקופה לקורא.

I. אכסיומות החילה:

- I_1 . לכל שתי נקודות שונות $P \neq Q$ קיים ישר יחיד l כך ש- $P \in l$ וגם $Q \in l$.
- I_2 . לכל ישר l קיימות לפחות שתי נקודות שונות $P \neq Q$ כך ש- $P \in l$ וגם $Q \in l$.
- I_3 . קיימות לפחות שלוש נקודות P, Q, R שאינן על ישר אחד - כלומר, $\sim \text{Coll}(P, Q, R)$.

II. אכסיומות ההסדר:

II_1 אם $A * B * C$ אז:

(א) $A \neq B$, $B \neq C$ ו- $A \neq C$.

(ב) קיים ישר l כך ש- $A \in l$ וגם $B \in l$ וגם $C \in l$.

(ג) מתקיים גם: $C * B * A$.

II_2 אם $A \neq B$ אזי קיימות לפחות שתי נקודות P ו- Q כך ש- $A * B * P$ ו- $A * Q * B$.

II_3 אם C, B, A שלוש נקודות שונות ($A \neq C, B \neq C, A \neq B$) וקיים ישר l כך ש- $A, B, C \in l$ - אזי או ש- $A * B * C$ או ש- $A * C * B$ או ש- $B * A * C$.

II_4 אם $A * B * C$ אז לא מתקיים $A * C * B$ וגם לא $B * A * C$.

II_5 יהא l ישר ו- C, B, A שלוש נקודות שונות:

(א) אם $AB * l$ וגם $AC * l$, אז $BC * l$.

(ב) אם $A * l * B$ וגם $B * l * C$, אז $AC * l$.

III. אכסיומות החפיפה:

III_1 . לכל נקודות F, E, D, C, B, A .

(א) $AB \cong BA$

(ב) אם $AA \cong BC$ אם ורק אם $B = C$.

(ג) $AB \cong CD$ אם ורק אם $CD \cong AB$.

(ד) אם $AB \cong CD$ ו- $CD \cong EF$ אז $AB \cong EF$.

III₂. לכל נקודות A, B, C, D כך ש- $C \neq D$ קיימת נקודה יחידה $E \in \overrightarrow{CD}$ כך ש-
 $AB \cong CE$.

III₃. אם $A * B * C$, $P * Q * R$, $AB \cong PQ$ ו- $BC \cong QR$ אז $AC \cong PR$.

III₄. אם $A * B * C$ ו- $B * C * D$ אז לא מתקיים: $AD \cong BC$.

III₅. אם $\sim \text{Coll}(A, B, C)$ ו- $\sim \text{Coll}(P, Q, R)$, ומתקיים: $AB \cong PQ$, אזי קיימת נקודה יחידה S כך ש- R ו- S מאותו צד של הישר $\ell(P, Q)$ (כלומר, $RS * \ell(P, Q)$ ומתקיים: $PS \cong AC$, $QS \cong BC$).

III₆. אם $\sim \text{Coll}(A, B, D)$ וגם $\sim \text{Coll}(P, Q, S)$, ומתקיים: $A * B * C$, $P * Q * R$, $AB \cong PQ$, $BC \cong QR$, $AD \cong PS$ ו- $BD \cong QS$ - אזי $CD \cong RS$.

IV. אכסיומת הרציפות:

תהיינה \mathcal{X} ו- \mathcal{Y} שתי קבוצות של נקודות השייכות לקרן \overrightarrow{AZ} , ולכל $P \in \mathcal{X}$ ו- $Q \in \mathcal{Y}$ מתקיים: $A * P * Q$. אזי קיימת נקודה $B \in \overrightarrow{AZ}$ כך שלכל שתי נקודות $P \in \mathcal{X}$ ו- $Q \in \mathcal{Y}$ השונות מ- B ($P \neq B \neq Q$) מתקיים: $P * B * Q$. (כלומר, B מפרידה בין \mathcal{X} ל- \mathcal{Y}).

V. אכסיומת המקבילים האוקלידית:

לכל ישר ℓ ולכל נקודה P שאינה על ℓ קיים לכל היותר מקביל אחד ל- ℓ דרך P .

4.3 הגיאומטריה האבסולוטית

אותו חלק של הגיאומטריה שניתן להוכחה ללא עזרת אכסיומת המקבילים נקרא הגיאומטריה האבסולוטית (או: הניטראלית - neutral או absolute geometry). היא כוללת את המשפטים הבאים, אשר הוכחתם (בעזרת האכסיומות של הילברט) מושארת ברובה לקורא כתרגיל.

שימו לב שחלק מן התוצאות - אלה המתייחסות לסדר של נקודות על ישר, או למצב הדדי של נקודות וישר במישור - נראו לאוקלידס מובנות מאליהן, אך הן נדרשות לנו ברגע שאנו רוצים להבטיח שכל מה שאנו מוכיחים הוא תוצאה לוגית של האכסיומות, ואינו מתבסס על אינטואיציה חזותית בלבד.

4.3.1 טענה:

לכל שתי נקודות שונות $P \neq Q$ מתקיים:

א. $\overrightarrow{PQ} \cap \overrightarrow{QP} = PQ$

ב. $X \in \overrightarrow{PQ} \cup \overrightarrow{QP} \Leftrightarrow X \in \ell(P, Q)$

4.3.2 טענה:

(א) בהינתן ש- $A * B * C$ ו- $B * C * D$, מתקיים $A * B * D$.

(ב) בהינתן ש- $A * B * C$ ו- $A * C * D$, מתקיים $B * C * D$ (ולכן גם $A * B * D$).

(ג) אם $A * B * C$ ו- $P \in \ell(A, B)$, מתקיים $P \in \overrightarrow{BA}$ או $P \in \overrightarrow{BC}$.

הערה: ניתן להגדיר את מושג הישר בעזרת יחס הסדר, במקום שיהיה מושג ראשוני. כיצד ינוסחו אכסיומות הסדר והחילה במקרה זה?

4.3.3 טענה:

על כל ישר יש אינסוף נקודות שונות.

4.3.4 למה:

המושג "הקרן \overrightarrow{AC} נמצאית בין הקרן \overrightarrow{AB} והקרן \overrightarrow{AD} " מוגדר היטב.

4.3.5 משפט Pasch:

בהינתן שלש נקודות שונות A, B, C , ישר ℓ , ונקודה $D \in \ell$ המקיימת: $A * D * B$, הישר ℓ חותך את הקטע AC או את הקטע BC (ואם $C \notin \ell$, אזי ℓ אינו חותך את שניהם יחד).

4.3.6 למה:

(א) אם הקרן \overrightarrow{AC} נמצאית בין הקרן \overrightarrow{AB} לבין הקרן \overrightarrow{AD} , אז הקרן \overrightarrow{AC}

חותכת את הקטע BD .

(ב) אם $\sim \text{Coll}(A, B, C)$, והנקודה D פנימית לזווית $\angle CAB$ אז $D \in \ell(B, C)$ אם

ורק אם $B * D * C$.

4.3.7 למה:

חפיפת זוויות מהווה יחס שקילות.

4.3.8 משפט ["צלע-זווית-צלע"]:

אם $\sim \text{Coll}(A, B, C)$, $\sim \text{Coll}(D, E, F)$, $AB \cong DE$, $\angle BAC \cong \angle EDF$, ו- $AC \cong DF$, אז $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

4.3.9 משפט ["זווית-צלע-זווית"]:

אם $\sim \text{Coll}(A, B, C)$, $\sim \text{Coll}(D, E, F)$, $AB \cong DE$, $\angle BAC \cong \angle EDF$, ו- $\angle ABC \cong \angle DEF$, אז $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

4.3.10 טענה:

(א) היחס "הקטע AB גדול מהקטע CD " מהווה יחס סדר לינארי על מחלקות

השקילות של הקטעים (תחת יחס חפיפת קטעים).

(ב) היחס "הזווית $\angle ABC$ גדולה מהזווית $\angle DEF$ " מהווה יחס סדר לינארי על מחלקות

השקילות של הזוויות.

4.3.11 טענה:

אם $\sim \text{Coll}(A, B, C)$ אז $AB \cong AC \Leftrightarrow \angle ABC \cong \angle ACB$ (זוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים חופפות, ולהיפך).

4.3.12 טענה:

(א) אם $\angle ABC \cong \angle DEF$ אז גם המשלימים חופפים בהתאמה.

(ב) זוויות קודקודיות חופפות.

4.3.13 למה:

כל הזוויות הישרות חופפות זו לזו.

4.3.14 טענה:

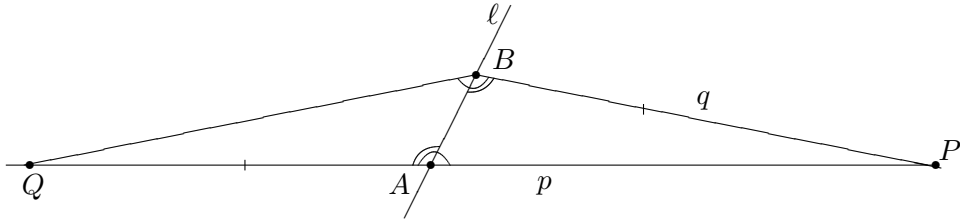
(א) לכל ישר ℓ ונקודה $P \notin \ell$, קיים אנך ל- ℓ העובר דרך P .

(ב) לכל ישר ℓ ונקודה $P \in \ell$, קיים אנך ל- ℓ העובר דרך P .

4.3.15 משפט:

אם ישר ℓ חותך שני ישרים שונים p ו- q ויוצר זוויות פנימיות שסכומן 180° , אז הישרים p ו- q מקבילים.

הוכחה: נניח ש- ℓ חותך את p ב- A ואת q ב- B , ונניח בדרך השלילה ש- p ו- q נחתכים בנקודה P :



נקצה על p בכיוון ההפוך מ- P קטע \overline{AQ} החופף ל- \overline{BP} . אז $\angle ABP \cong \angle QAB$ לפי ההנחה, ולכן המשולשים $\triangle PBA$ ו- $\triangle QAB$ חופפים לפי צלע-זווית-צלע. אך אז $\angle QBA$ ו- $\angle PBA$ משלימים זה את זה לזווית שטוחה, כלומר הנקודות Q , B , P הן על ישר אחד - ולכן הישרים p ו- q מתלכדים - סתירה. \square

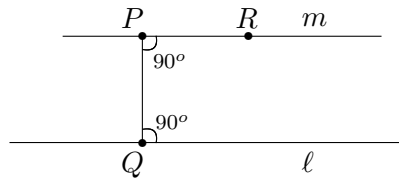
4.3.16 מסקנה:

אם שני ישרים שונים k, ℓ נחתכים ע"י ישר שלישי m היוצר זוויות חילופיות (פנימיות או חיצוניות) חופפות, אז $k \parallel \ell$.

4.3.17 מסקנה:

אם הנקודה P אינה על הישר ℓ , אז קיים לפחות מקביל אחד ל- ℓ דרך P .

הוכחה: נוריד אנך PQ ל- ℓ , ונעלה אנך PR ל- PQ ב- P .



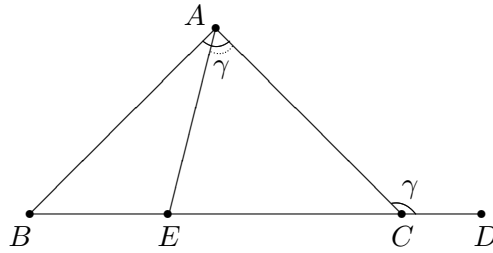
4.3.18 משפט ["צלע-זווית-זווית"]:

אם $\angle BCA \cong \angle EDF$, $\angle BAC \cong \angle EDF$, $AB \cong DE$, $\sim \text{Coll}(D, E, F)$, $\sim \text{Coll}(A, B, C)$ אז $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ או $\angle EFD$.

4.3.19 משפט:

זווית חיצונית למשולש גדולה מכל זווית פנימית שאינה צמודה לה.

הוכחה: תהי $\gamma := \angle ACD$ זווית חיצונית למשולש $\triangle ABC$, ו- $\angle BAC$ זווית פנימית שאינה צמודה לה. לא ייתכן ש- $\gamma = \angle BAC$, כי אז היו הישרים AB ו- CD מקבילים, לפי משפט 4.3.15, בסתירה לכך שהם נחתכים ב- B . אם נניח ש- $\gamma < \angle BAC$, אז קיימת נקודה E על הצלע BC כך ש- $\angle CAE = \gamma$, ואז הישרים AE ו- CD מקבילים לפי משפט 4.3.15 - בסתירה לכך שהם נחתכים ב- E .



4.3.20 מסקנה:

הסכום של כל שתי זוויות במשולש קטן מ- 180° .

הוכחה: בסימונים של הוכחת משפט 4.3.19: $\angle BAC + \angle ACB < \angle ACD + \angle ACB = 180^\circ$ □

4.3.21 טענה:

(א) אם $\sim \text{Coll}(A, B, C)$ אז $\angle BAC > \angle ACB \Leftrightarrow BC > AB$ (הזווית הגדולה במשולש מול הצלע הגדולה).

(ב) אם $\sim \text{Coll}(A, B, C)$, $\sim \text{Coll}(D, E, F)$ ו- $AB \cong DE$, $AC \cong DF$ אז $\angle BAC > \angle EDF \Leftrightarrow BC > EF$

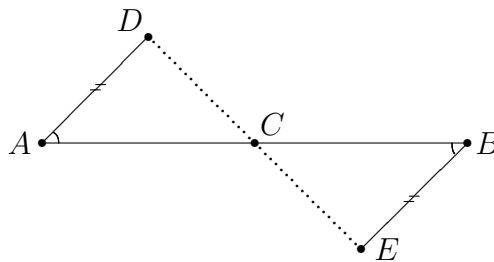
4.3.22 טענה [אי-שוויון המשולש]:

לכל שלש נקודות A, B, C כך ש- $\sim \text{Coll}(A, B, C)$, קיימת נקודה D כך ש- $A * B * D$, $AD > AC$ ו- $BD \cong BC$

4.3.23 טענה [אמצע קטע]:

לכל שתי נקודות $A \neq B$ קיימת נקודה C כך ש- $A * C * B$ ו- $AC \cong CB$.

הוכחה: השתמש/י בבנייה:



4.3.24 טענה [חוצה זווית]:

לכל שלש נקודות A, B, C כך ש- $\sim \text{Coll}(A, B, C)$, קיימת נקודה D כך שהקרן \overrightarrow{AD} נמצאית בין הקרן \overrightarrow{AB} והקרן \overrightarrow{AC} ו- $\angle BAD \cong \angle CAD$.

4.3.25 משפט [האכסיומה של ארכימדס]:

בהינתן נקודות $A \neq F, C \neq D$, קיים מספר שלם $1 \leq n$ ונקודות E_0, E_1, \dots, E_n ב- \overrightarrow{AF} כך ש- $E_0 = A$, $E_{i-1}E_i \cong CD$, ו- $A * E_i * E_{i+1}$ ל- $i = 1, \dots, n$, ו- $A * F * E_n$.

הוכחה: נקצה על הקרן \overrightarrow{AF} סדרת נקודות $E_0, E_1, \dots, E_n, A = E_0$ כך ש- $E_{i-1}E_i \cong CD$ ונגדיר שתי קבוצות של נקודות ב- \overrightarrow{AF} : $\mathfrak{X} := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_0E_n$ ו- $\mathfrak{Y} := \overrightarrow{AF} \setminus \mathfrak{X}$. אם $\mathfrak{Y} \neq \emptyset$, מתקיימות ההנחות של אכסיומה IV, והנקודה $\overrightarrow{AF} \ni B$ שקיומה מובטח ע"י אכסיומה IV אינה משתייכת לא ל- \mathfrak{X} ולא ל- \mathfrak{Y} - סתירה. \square

4.3.26 משפט:

לכל בחירה של שתי נקודות שונות (קבועות) $Y \neq X$ ניתן להתאים לכל שתי נקודות A, B מספר ממשי אי-שלילי, שייקרא האורך של הקטע AB , ויסומן: \overline{AB} , באופן שמתקיים:

א. $1 = \overline{XY}$.

ב. $0 = \overline{AB} \Leftrightarrow A = B$.

ג. $\overline{AB} = \overline{CD}$ אם ורק אם $AB \cong CD$.

ד. $\overline{AC} > \overline{AB}$ עבור $B \in \overline{AC}$ אם ורק אם $A * B * C$.

ה. אם $A * B * C$ אז $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

4.3.27 משפט:

ניתן להתאים לכל שלוש נקודות $A \neq B \neq C$ מספר ממשי, הנקרא המידה של הזווית $\angle ABC$, ויסומן: $(\angle ABC)^\circ$, באופן שמתקיים:

א. $(\angle ABC)^\circ = 0^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$.

ב. $(\angle ABC)^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A * B * C$.

ג. אם $\sim \text{Coll}(A, B, C)$ אז $0 < (\angle ABC)^\circ < 180^\circ$.

ד. $(\angle ABC)^\circ = (\angle DEF)^\circ$ אם ורק אם $\angle ABC \cong \angle DEF$.

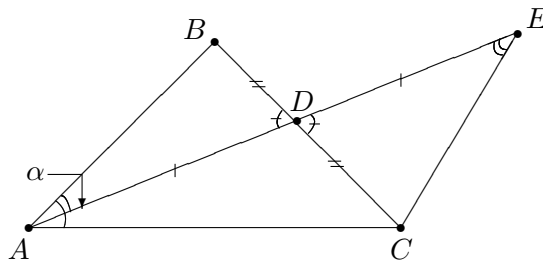
ה. אם מתקיים $B * A * D$ וגם $\sim \text{Coll}(A, B, C)$, או שהקרן \overrightarrow{AC} נמצאת בין הקרן \overrightarrow{AB} והקרן \overrightarrow{AD} , אזי: $(\angle BCA)^\circ + (\angle CAD)^\circ = (\angle BAD)^\circ$.

המשפט הבא הוכח באופן בלתי-תלוי על ידי סאכרי ולז'נדר (Adrien-Marie Legendre [1752-1833]), במהלך נסיונותיהם להוכיח את אכסיומת המקבילים האוקלידית במסגרת הגיאומטריה האבסולוטית:

משפט: 4.3.28

הסכום של שלוש הזוויות במשולש אינו גדול מ- 180° .

הוכחה: נניח שסכום הזוויות במשולש $\triangle ABC$ הוא $180^\circ + \varepsilon$, ושהזווית הקטנה ביותר במשולש היא $\angle BAC = \alpha$. אם D אמצע הצלע BC , תהי E נקודה על הישר AD מעבר ל- D כך ש- $\overline{AD} = \overline{DE}$. אז המשולשים $\triangle ABD$ ו- $\triangle ECD$ חופפים לפי צלע-זווית-צלע, וסכום הזוויות במשולש $\triangle ACE$ הוא שוב $180^\circ + \varepsilon$. אולם אחת משתי הזוויות $\angle EAC$ ו- $\angle BAD$ קטנה או שווה ל- $\alpha/2$, ומכיון ש- $\angle AEC = \angle BAD$ לפי הבנייה, הראינו שבמשולש $\triangle ACE$ הזווית הקטנה ביותר היא לכל היותר $\alpha/2$.



על-ידי חזרה על בניה זו, על-פי האכסיומה של ארכימדס נגיע למשולש שסכום הזוויות בו $180^\circ + \varepsilon$, אבל הזווית הקטנה ביותר בו קטנה מ- ε - בסתירה למסקנה 4.3.20. \square

4.3.29 מסקנה:

סכום הזוויות במרובע קמור $360^\circ \geq$

4.3.30 הגדרה:

נגדיר את החסר (defect) של המשולש $\triangle ABC$ להיות המספר:

$$\text{Def}(\triangle ABC) := 180^\circ - (\angle ABC)^\circ - (\angle BCA)^\circ - (\angle CAB)^\circ$$

הערה: לפי משפט 4.3.28, החסר הוא מספר אי-שלילי $180^\circ \geq$.

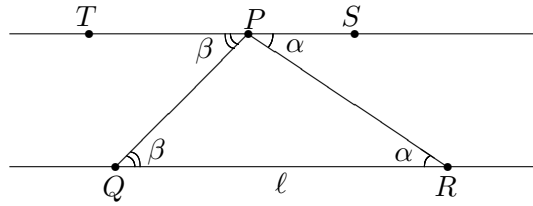
4.3.31 למה:

אם הנקודות A, B ו- C אינן על ישר אחד ($\sim \text{Coll}(A, B, C)$), ו- $A * D * B$ אז $\text{Def}(\triangle ABC) = \text{Def}(\triangle ACD) + \text{Def}(\triangle BCD)$.

4.3.32 משפט:

אם קיים ישר ℓ ונקודה P מחוץ ל- ℓ , שדרכה עובר מקביל יחיד ל- ℓ , אז קיים משולש שסכום הזוויות בו שווה ל- 180° .

הוכחה: אם Q ו- R על ℓ , ותהי $\alpha := \angle SPR = \angle PRQ$ ו- $\beta := \angle TPQ = \angle PQR$



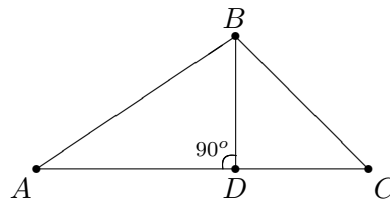
תהי $\alpha := \angle SPR = \angle PRQ$ ו- $\beta := \angle TPQ = \angle PQR$, אז הישרים PT ו- PS שניהם מקבילים ל- l (לפי משפט 1), ולכן הם מתלכדים (בגלל היחידות) - כלומר, הזווית $\angle TPS$ שטוחה. אבל זה אומר ש- $\alpha + \beta + \angle QPR = 180^\circ$. \square

4.3.33 משפט:

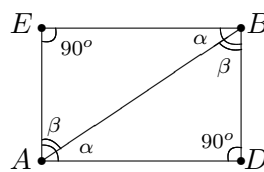
אם קיים משולש שבו סכום הזוויות 180° , אז קיים מלבן (כלומר, מרובע שכל הזוויות בו ישרות).

הוכחה: נניח שקיים משולש אחד $\triangle ABC$ שבו סכום הזוויות 180° .

בלי הגבלת הכלליות נניח ש- $\angle ABC$ היא הזווית הגדולה ביותר במשולש. על-ידי הור-דת אנך מ- B לנקודה D בצלע AC , לפי משפט 4.3.28 נראה שסכום הזוויות בכל אחד מן המשולשים ישרי-הזווית $\triangle ABD$ ו- $\triangle BCD$ שווה ל- 180° .



על-ידי בניה של משולש חופף ל- $\triangle ABD$ מצידו השני של הצלע AB :



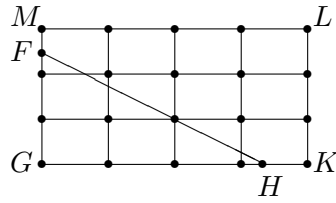
\square

נקבל מלבן $AEBD$.

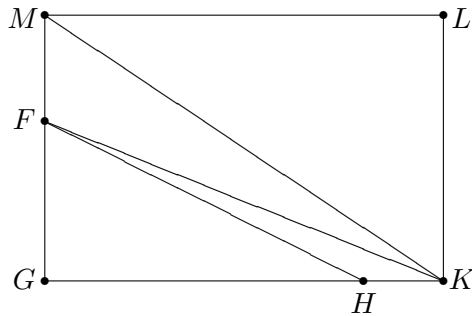
4.3.34 משפט:

אם קיים מלבן, אז סכום הזוויות בכל משולש הוא 180° .

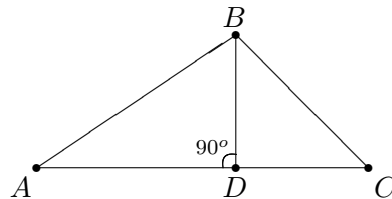
הוכחה: על-ידי שכפול המלבן מספר פעמים בכיוון האופקי והאנכי, לפי האכסיומה של ארכי-ימדס נוכל לקבל מלבן גדול כרצוננו. בפרט, בהינתן משולש ישר זווית כלשהו $\triangle FGH$, נוכל לשכנו בתוך מלבן $GKLM$.



מכיוון שכל הזוויות $\angle LMG$, $\angle KLM$, $\angle GKL$, $\angle KGM$ ישרות, ממשפט 4.3.28 נראה שסכום הזוויות בכל אחד מן המשולשים $\triangle GKM$ ו- $\triangle MLK$ הוא 180° .



אך מאותו שיקול של חשבון זוויות נמצא שסכום הזוויות בכל אחד מן המשולשים $\triangle MFK$ ו- $\triangle KFG$ הוא 180° ; ובאותו אופן סכום הזוויות ב- $\triangle FHK$ ו- $\triangle FGH$ הוא 180° . הראינו, איפוא, שסכום הזוויות בכל משולש ישר-זווית הוא 180° .



עתה בהינתן משולש כלשהו $\triangle ABC$, על-ידי הורדת אנך נחלקו לשני משולשים ישרי-זווית שסכום הזוויות בכל אחד מהם 180° , ולכן כך גם ב- $\triangle ABC$. \square

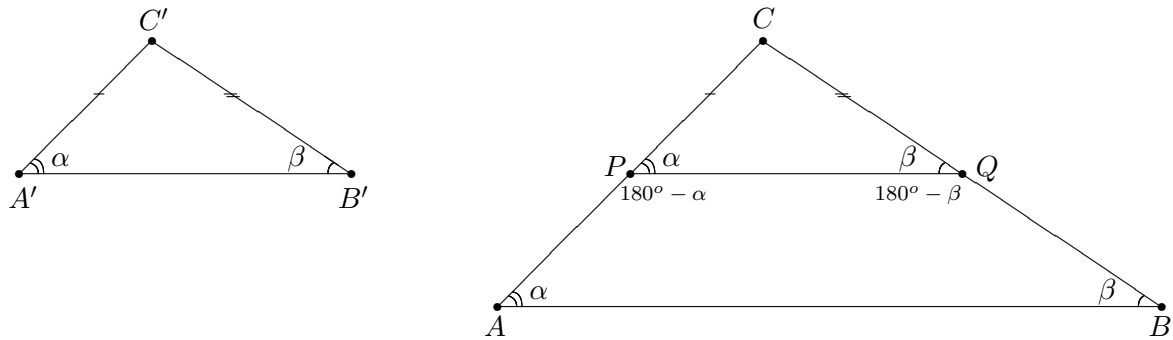
4.3.35 מסקנה:

אם קיים משולש אחד שבו סכום הזוויות 180° , אז סכום הזוויות בכל משולש שווה ל- 180° .

4.3.36 טענה [האכסיומה של Wallis]:

קיום שני משולשים דומים שאינם חופפים גורר שסכום הזוויות בכל משולש שווה ל- 180° .

הוכחה: נניח ש- $\triangle ABC$ ו- $\triangle A'B'C'$ דומים, אך אינם חופפים, ובלי הגבלת הכלליות $\overline{A'C'} < \overline{AC}$. אז קיימת נקודה P בין C ל- A כך ש- $\overline{CP} = \overline{C'A'}$. אם Q נקודה על הקרן \overrightarrow{CB} כך ש- $\overline{CQ} = \overline{C'B'}$, אז המשולשים $\triangle PQC$ ו- $\triangle A'B'C'$ חופפים (לפי צלע-זווית-צלע), ולכן $\alpha := \angle CAB = \angle CPQ$, כלומר הישרים PQ ו- AB מקבילים, לפי משפט 4.3.15, ובפרט Q נמצאת בין C ל- B .



מכיוון ש- $180^\circ = \angle CBA + \angle BQP$ ו- $180^\circ = \angle CPQ + \angle APQ = \angle CAB + \angle APQ$ סכום הזוויות בטרפז $APQB$ הוא 360° , ולכן סכום הזוויות במשולש $\triangle APB$ הוא 180° . □

4.3.37 טענה:

יהא $\square ABCD$ מרובע קמור, שבו $\angle ABC$ ו- $\angle BCD$ זוויות ישרות. אז:

(א) אם $AB \cong CD$, אז $\angle BAD \cong \angle ADC$;

(ב) אם $\overline{AB} < \overline{CD}$, אז $\angle BAD > \angle ADC$;

(ג) אם $\angle BAD > \angle ADC$, אז $\overline{AB} < \overline{CD}$.

4.3.38 הגדרה:

מרובע סאכרי הוא מרובע קמור $\square ABCD$, $\angle ABC$ ו- $\angle BCD$ זוויות ישרות ו- $AB \cong CD$.

4.3.39 טענה:

(א) אם במרובע סאכרי $\square ABCD$ מתקיים: $\angle BAD$ זווית ישרה, אז מתקיימת אכסיומת המקבילים V .

(ב) יהו E ו- F אמצעי הקטעים AD ו- BC בהתאמה במרובע סאכרי $\square ABCD$ (כלומר, $AE \cong ED$, $A * E * D$, $BF \cong FC$, $B * F * C$). אזי $\angle EFC$ ו- $\angle DEF$ זוויות ישרות ו- $\overline{EF} \leq \overline{AB}$ ו- $\overline{BF} \leq \overline{AE}$.

(ג) אם קיים שוויון $EF \cong AB$ או $BF \cong AE$ ב-(ב), אז מתקיימת אכסיומת המקביל-ים V .

4.3.40 טענה:

אכסיומת המקבילים V שקולה לטענה הבאה:

קיימים שני ישרים מקבילים $k \parallel \ell$ ונקודות $A * B * C$ על k , $D * E * F$ על ℓ , כך ש- $AD \cong BE \cong FC$ והישרים $\ell(A, D)$, $\ell(B, E)$ ו- $\ell(C, F)$ מאונכים לישר ℓ .

4.4 הגיאומטריה ההיפרבולית האכסיומאטית

הגיאומטריה ההיפרבולית היא זו המתקבלת מהוספת שלילת הפוסטולאט החמישי לשאר האכסיומות של אוקלידס:

אכסיומת המקבילים ההיפרבולית V' :

קיים ישר ℓ ונקודה P מחוץ ל- ℓ , אשר דרכה ניתן להעביר לפחות שני מקבילים שונים ל- ℓ .

המשפטים הבאים, של הגיאומטריה ההיפרבולית, מסתמכים על אכסיומה V' (בנוסף לאכסיומות מקבוצות I-IV, כמובן). בדרך-כלל לא ניתן הוכחות מלאות, אלא רק הדרכה לקורא.

4.4.1 משפט:

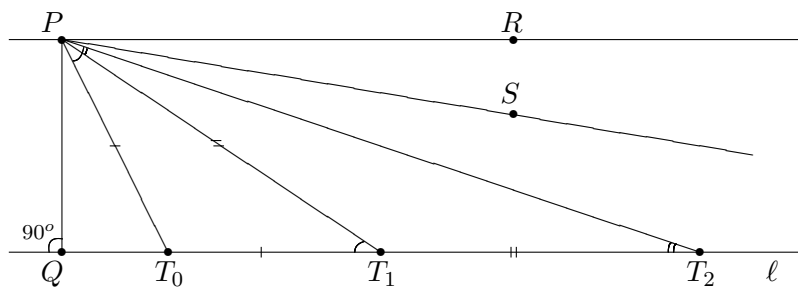
קיים משולש עם סכום זוויות קטן מ- 180° .

הוכחה: בהינתן P ו- ℓ כבאכסיומת המקבילים ההיפרבולית, נניח ש- PQ האנך ל- ℓ ו- PR הישר המקביל "הסטנדרטי", כבהוכחת מסקנה 4.3.17, ואילו הישר PS הוא מקביל נוסף, ובלי הגבלת הכלליות $\angle SPQ < 90^\circ$, ולכן $0^\circ < \angle SPR < 90^\circ$.

תהי נקודה כלשהי על הישר ℓ מאותו צד של PQ כמו S . אז $\angle T_0PQ < \angle SPQ$. אם נקצה $\overline{T_0T_1} = \overline{T_0P}$ או $\triangle T_1PT_0$ שווה שוקיים, ולכן $\angle PT_1Q = \angle T_0PT_1$, וממשפט 4 אפשר להסיק ש- $\angle PT_0Q \geq 2 \cdot \angle PT_1Q$. עתה אם נקצה $\overline{T_1T_2} = \overline{T_1P}$ נמצא ש- להסיק ש- $\angle PT_1Q \geq 2 \cdot \angle PT_2Q$ ולכן להסיק ש- $\angle PT_0Q/4 \geq \angle PT_2Q$. אם נמשיך באופן זה, לפי האכסיומה של ארכימדס נקבל בסופו של דבר נקודה T_n על ℓ כך ש- $\angle SPR > \angle PT_nQ$, ולכן:

$$90^\circ = \angle SPR + \angle SPQ > \angle PT_nQ + \angle T_nPQ$$

כלומר, סכום הזוויות במשולש $\triangle QPT_n$ קטן מ- 180° , כנדרש. \square



4.4.2 מסקנה:

סכום הזוויות בכל משולש קטן מ- 180° .

הגדרות: (א) הישר ℓ נקרא אנך משותף לישרים m, k אם $k \neq m$ ויש נקודות $P \in m \cap \ell$, $Q \in k \cap \ell$ כך ש- $\ell = \ell(P, Q)$ מאונך הן ל- m והן ל- k .

(ב) הישרים m, k נקראים מקבילים מתבדרים אם הם מקבילים ויש להם אנך משותף.

(ג) הישרים m, k נקראים מקבילים אסימפטוטיים אם הם מקבילים ואין להם אנך משותף.

4.4.3 טענה:

(א) לשני ישרים מקבילים יש לכל היותר אנך משותף אחד.

(ב) אם $k \parallel \ell$ ויש נקודות $A \neq B$ על k , $C \neq D$ על ℓ כך שהישרים $\ell(A, C)$ ו- $\ell(B, D)$ מאונכים לישר k ו- $AC \cong BD$ אז k ו- ℓ מקבילים מתבדרים.

(ג) אם לישרים מקבילים k ו- ℓ יש אנך משותף $\ell(P, Q)$ ($Q \in \ell, P \in k$) וקיימות נקודות $A, B \in k$ ו- $C, D \in \ell$ כך ש- $A * P * B$, $C * Q * D$, $AP \cong PB$ ו- $\ell(A, C)$ ו- $\ell(B, D)$ מאונכים ל- ℓ אז $AC \cong BD$ ו- $CQ \cong QD$.

4.4.4 טענה:

לכל ישר ℓ ולכל נקודה P שאינה על ℓ , אם $Q \in \ell$ הנקודה כך ש- $\ell(P, Q)$ מאונך ל- ℓ (לעיל) אז קיימות שתי נקודות A, B כך ש- $A * \ell(P, Q) * B$, $\ell(P, A) \parallel \ell$ ו- $\ell(P, B) \parallel \ell$ ומתקיימים התנאים הבאים:

(א) הקרן \overrightarrow{PC} נמצאית בין הקרן \overrightarrow{PA} לבין הקרן \overrightarrow{PB} אם ורק אם הקרן \overrightarrow{PC} חותכת את הישר ℓ .

(ב) $\angle APQ \cong \angle BPQ$.

(ג) הזווית $\angle APQ$ חדה.

□

רמז: ל-(א), נשתמש באכסיומה (IV).

4.4.5 הגדרה:

הקרניים \overrightarrow{PA} ו- \overrightarrow{PB} שקיומם הוכח בטענה 4.4.4 נקראות קרניים מקבילות גבוליות. לישר ℓ דרך P , ונאמר גם שהקרן \overrightarrow{PA} מקבילה גבולית לקרן \overrightarrow{QD} אם $AD * \ell(P, Q)$ ו- $D \in \ell$. הזווית $\angle APQ$ נקראות זווית המקבילות ל- ℓ ב- P .

4.4.6 טענה:

תהא \overrightarrow{PA} קרן מקבילה גבולית לישר ℓ :

(א) אם $R \in \overrightarrow{PA}$ אז גם הקרן \overrightarrow{RA} קרן מקבילה גבולית לישר ℓ .

(ב) אם $R * P * A$ אז גם הקרן \overrightarrow{RA} קרן מקבילה גבולית לישר ℓ .

הוכחה: ל-(ב), בהינתן $\ell(R, S)$ אנך ל- ℓ ו- D נקודה פנימית ל- $\angle PRS$, יש נקודה E כך ש- $E * R * D$. הראה/י ש- $A * \ell(P, Q) * E$. \square

הגדרות: (א) תהינה \overrightarrow{AB} ו- \overrightarrow{CD} קרניים חלקיות לאותו ישר ℓ . נאמר שיש להן אותו כיוון אם $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{CD}$ או $\overrightarrow{CD} \subseteq \overrightarrow{AB}$; אחרת נאמר שיש להן כיוונים הפוכים.

(ב) נאמר שהקרן \overrightarrow{PA} מקבילה אסימפטוטית לקרן \overrightarrow{QC} (סימון: $\overrightarrow{PA} \parallel \overrightarrow{QC}$) אם יש קרן \overrightarrow{RB} בעלת אותו כיוון כמו \overrightarrow{PA} וקרן \overrightarrow{SD} בעלת אותו כיוון כמו \overrightarrow{QC} כך ש- \overrightarrow{RB} מקבילה גבולית ל- \overrightarrow{SD} .

4.4.7 טענה:

תהא \overrightarrow{PA} קרן מקבילה גבולית לקרן \overrightarrow{QC} , ו- $R \in \ell(P, A)$ כך ש- $\ell(Q, R)$ מאונך ל- $\ell(P, A)$.

(א) אם D נקודה פנימית ל- $\angle RQC$, אז הקרן \overrightarrow{QD} חותכת את \overrightarrow{PA} .

(ב) היחס "בעלות אותו כיוון" (בין קרניים חלקיות לישר נתון ℓ) הוא יחס שקילות, ושיחס המקבילות האסימפטוטית מוגדר על מחלקות שקילות של קרניים.

(ג) יחס המקבילות האסימפטוטית הוא סימטרי: $\overrightarrow{PA} \parallel \overrightarrow{QC} \Leftrightarrow \overrightarrow{QC} \parallel \overrightarrow{PA}$.

(ד) אם \overrightarrow{PA} מקבילה אסימפטוטית ל- \overrightarrow{QC} אז $AC * \ell(P, Q)$.

הוכחה: ל-(א), נראה קיומן של נקודות E, F, G, H, K, L המקיימות:

$$1. E \in \overrightarrow{QD} \text{ ו-} \angle PEQ = 90^\circ;$$

$$2. P * F * Q \text{ ו-} PF \cong PE;$$

$$3. \angle PFG = 90^\circ \text{ ו-} GD * \ell(P, Q);$$

$$4. H \in \overrightarrow{QC} \text{ ו-} \angle APE \cong \angle HPQ;$$

$$5. P * K * H \text{ ו-} \overrightarrow{FG} \in K;$$

$$6. L \in \overrightarrow{PA} \text{ ו-} PL \cong PK;$$

$$7. \angle PEL = 90^\circ \text{ ולכן } L \in \overrightarrow{QD}.$$

□

4.4.8 טענה:

אם \overrightarrow{PA} קרן מקבילה גבולית לקרן \overrightarrow{QC} , $P * R * A$, $S \in \ell(Q, C)$, $\angle RSQ = 90^\circ$ או $S \in \overrightarrow{QC}$ ו- $PQ > SR$.

4.4.9 טענה:

יהא $\triangle ABC$ משולש (כלומר, $\sim \text{Coll}(A, B, C)$), k האנך האמצעי לצלע AB בנקודה D (כלומר, $A * D * B$, $AD \cong DB$, $D \in k$ ו- $\ell(A, B) \perp k$), ℓ האנך האמצעי לצלע BC בנקודה E , ו- m האנך האמצעי לצלע AC בנקודה F .

(א) אם k ו- ℓ נחתכים בנקודה P , אז גם $P \in m$.

(ב) אם $AC \geq AB$ אז הישר ℓ חותך את הצלע AC .

(ג) בגאומטריה האוקלידית (כלומר, בהנחת אכסיומה V) הישרים k ו- ℓ תמיד נחתכים.

(ד) בגאומטריה ההיפרבולית (כלומר, שוב בהנחת אכסיומה V) קיימים משולשים $\triangle ABC$ שבהם האנכים האמצעיים k ו- ℓ אינם נחתכים.

(ה) אכסיומת המקבילים האוקלידית שקולה לטענה:

בכל משולש $\triangle ABC$ האנכים האמצעיים של שלוש הצלעות נחתכים בנקודה אחת.

הגדרה: נאמר ש- $k * \ell * m$ אם מתקיים $k \parallel \ell$, $k \parallel m$, $\ell \parallel m$, ולכל $A \in k$ ו- $C \in m$ יש נקודה $B \in \ell$ כך ש- $A * B * C$.

4.4.10 טענה:

(א) אם $k * \ell * m$ אז גם $m * \ell * k$, ולא מתקיים $m * k * \ell$ או $k * m * \ell$.

(ב) אם $k \parallel \ell$, $k \parallel m$, $\ell \parallel m$, וקיימות נקודות $A \in k$, $B \in \ell$ ו- $C \in m$ כך ש- $A * B * C$ - אז $k * \ell * m$.

(ג) אם $\overrightarrow{PA} \parallel \overrightarrow{QB}$ וגם $\overrightarrow{RC} \parallel \overrightarrow{QB}$ אז עבור $k = \ell(P, A)$, $\ell = \ell(Q, B)$, ו- $m = \ell(R, C)$, והישרים k , ℓ ו- m כולם שונים, מתקיים (בדיוק) אחד מבין היחסים: $m * k * \ell$, $k * \ell * m$ או $k * m * \ell$.

4.4.11 טענה:

יחס המקבילות האסימפטוטית בין קרניים היא טרנזיטיבית. כלומר, אם $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ ו-
 $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{EF}$ אז $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{EF}$ או ש- $\ell(A, B) = \ell(E, F)$

4.4.12 טענה:

אם מתקיים $A * C * E$ ו- $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ אז $\angle ECD > \angle CAB$

4.4.13 טענה:

אם הקרן \overrightarrow{PA} מקבילה גבולית לקרן \overrightarrow{QC} אז הקרניים "מתקרבות באופן אסימפטוטי"
 במונח הבא: לכל נקודה R כך ש- $P * R * Q$ קיימות נקודות $R' \in \overrightarrow{PA}$ ו- $Q' \in \overrightarrow{QC}$ כך
 ש- $R'Q' \cong RQ$ ו- $\angle R'Q'Q = 90^\circ$.

הוכחה: נמצא נקודות $S \in \overrightarrow{PA}$, $B \in \overrightarrow{QC}$ כך ש- $\overrightarrow{SR} \parallel \overrightarrow{BQ}$ מקבילה גבולית ל- \overrightarrow{BQ} . תהיה
 הנקודה כך ש- $P * S * R'$ ו- $RS \cong R'S$. \square

4.4.14 טענה:

(א) שאם ℓ, k מקבילים מתבדרים אז k אינו מכיל קרן מקבילה גבולית ל- ℓ באף אחד משני
 הכיוונים.

(ב) גם ההיפך נכון: אם $k \parallel \ell$ ו- k אינו מכיל קרן מקבילה גבולית ל- ℓ (באף אחד משני
 הכיוונים) אז ℓ, k מקבילים מתבדרים.

הוכחה: לפי טענה 4.3.39 (ב) מספיק להראות קיום שתי נקודות על k באותו מרחק מ- ℓ .
 תהיינה $k \ni A, B$ ו- $\ell \ni P, Q$ כך ש- $\angle APQ = 90^\circ$ ו- $\angle BQP = 90^\circ$, ונגיח שמתקיים
 $BQ > AP$. נראה קיום נקודות C, D, E, \dots כך ש-

$$1. A * C * P \text{ עם } CP \cong BQ, \text{ ו-} A * B * Z \text{ עם } FB * \ell(A, P) \text{ עם } \angle FCP \cong \angle ZBQ$$

$$2. \overrightarrow{PK} \parallel \overrightarrow{AZ}, \text{ ו-} \overrightarrow{QH} \parallel \overrightarrow{BZ}, \overrightarrow{PG} \parallel \overrightarrow{CF}$$

$$3. \angle BQH \cong \angle APG$$

$$4. \angle GPY \cong \angle HQY \text{ ו-} P * Q * Y$$

$$5. \overrightarrow{PK} \parallel \overrightarrow{QH}$$

$$6. \angle KPY < \angle HQY, \text{ ולכן } G \text{ פנימית ל-} \angle KPA$$

$$7. \overrightarrow{CF} \text{ חותך את } \overrightarrow{AB} \text{ בנקודה } D$$

$$8. BE \cong CD, R, S \in \overrightarrow{PQ}, E \in \overrightarrow{BZ} \text{ ו-} \angle DRP = \angle ESP = 90^\circ \text{ ו-} DR \cong ES$$

(א) אם $\text{Coll}(A, B, C) \sim$ אז קיים ישר (יחיד) ℓ כך ש- \overrightarrow{BA} מקביל גבולי ל- ℓ וגם \overrightarrow{BC} מקביל גבולי ל- ℓ .

(ב) אם $\angle APB < 90^\circ$ אז קיים ישר (יחיד) ℓ כך ש- $\ell \perp \ell(P, B)$ ו- \overrightarrow{PA} מקביל גבולית ל- ℓ .

(ג) קיימות נקודות $A, B, C, D, E, F, G, H, K$ כך ש- $B * A * C$ ו- $E * D * F$ ו- $H * G * K$ ו- $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DE}$ ו- $\overrightarrow{DF} \parallel \overrightarrow{GH}$ ו- $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{GK}$.

(ד) אם קיימות נקודות A, B, \dots כב- (ג) אז אין ישר n הנחתך עם כל אחד מהישרים $\ell(A, B)$, $\ell(D, E)$, ו- $\ell(G, H)$.

(ה) קיימים ישרים k, ℓ, m כך ש- $k \parallel \ell$, $k \parallel m$, ו- $\ell \parallel m$, ובכל זאת לא מתקיים אף אחד מן היחסים $k * \ell * m$, $k * m * \ell$ או $m * k * \ell$.

הוכחה:

(א) בלי הגבלת הכלליות נניח ש- $BA \cong BC$. אז קיימות נקודות D, E, F, \dots כך ש-

$$1. \overrightarrow{CE} \parallel \overrightarrow{BA} \text{ ו- } \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$$

2. $\overrightarrow{AH} \parallel \overrightarrow{CG}$, $B * C * G$, $B * A * F$ חוצה הזווית $\angle FAD$ ו- \overrightarrow{CK} חוצה הזווית $\angle ECG$.

3. $\overrightarrow{AH} \cap \overrightarrow{CE} = \{L\}$ ונאמר $A * L * H$; בדומה $C * M * K$ ו- $C * M * K$.

$$4. \angle HLC \cong \angle KMA \cong \angle CMD$$

$$5. CL \cong AM > CM \text{ (טענה 4.3.21 (א))}$$

$$6. \overrightarrow{NP} \parallel \overrightarrow{CK} \text{ ולכן } \angle CNP \cong \angle HLC, CN \cong CM, C * N * L$$

$$7. \ell(C, K) \parallel \ell(A, H) \text{ (מסקנה 4.3.16 ומשפט 4.3.5)}$$

$$8. \text{לא יתכן } \overrightarrow{LH} \parallel \overrightarrow{CK} \text{ (טענות 4.4.13 ו-4.4.14)}$$

$$9. (\angle AHK)^\circ = 90^\circ = (\angle CKH)^\circ \text{ ונאמר } \ell(A, H) \perp \ell \perp \ell(C, K)$$

10. $AH \cong CK$ ולכן אילו $\ell(B, C)$ ו- ℓ נחתכו (נאמר ב- G), אז גם $\ell(A, D)$ ו- ℓ .

נחתכים (נאמר ב- D) ואז $(\angle ADH)^\circ = (\angle GCK)^\circ$, בסתירה לכך ש- $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BG}$.

11. $\overrightarrow{KR} \parallel \overrightarrow{BC}$ ו- $\overrightarrow{HS} \parallel \overrightarrow{AD}$ ואז $(\angle RKC)^\circ = (\angle CHA)^\circ$, ולכן לא מתקיים

$$\ell = \ell(H, S) = \ell(K, R) \text{ ואז } \overrightarrow{KR} \parallel \overrightarrow{HS} \text{ (טענה 4.4.13)}$$

(ב) קיימת נקודה A' כך ש- $A' * \ell(P, B) * A$ ו- $\angle APB \cong \angle A'PB$. עתה נשתמש ב-(א).

(ג) נשתמש ב-(ב) ל- $\angle ABC = 90^\circ$. □

4.4.16 טענה:

(א) יהו E, D, C, B, A נקודות המקיימות: $A * C * E$, $A * B * D$, $(\angle ABC)^\circ = (\angle ADE)^\circ = 90^\circ$ ו- $AC \cong CE$. אז $AB \geq BD$ ו- $\overline{DE} \geq 2\overline{BC}$.

(ב) "המרחק בין שני ישרים נחתכים גדל לאינסוף", במובן הבא: אם P נקודת החיתוך של שני ישרים שונים k ו- ℓ , אז לכל $X \neq Y$ קיימות נקודות $k \ni A$ ו- $B \ni \ell$ כך ש- $(\angle BAP)^\circ = 90^\circ$ ו- $BA > XY$.

(ג) אם $\ell(P, Q)$ אנך משותף לישרים המקבילים k ו- ℓ (עם $P \in k$ ו- $Q \in \ell$), אז לכל $X \neq Y$ קיימות נקודות $k \ni A$ ו- $B \ni \ell$ כך ש- $(\angle ABP)^\circ = 90^\circ$ ו- $AB > XY$.

הוכחה:

(א) נבחר נקודה F כך ש- $B * C * F$, $BC \cong CF$, ו- $(\angle CFE)^\circ = 90^\circ$, ונעזר בטענה 4.4.4 (ב).

(ב) נשתמש ב- (א) ובמשפט 4.3.19.

(ג) נבחר $P \neq A'$ ו- $Q \neq B'$ כך ש- $(\angle A'B'Q)^\circ = 90^\circ$, ותהא \overrightarrow{PC} קרן מקבילה גבולית ל- $\overrightarrow{QB'}$, נראה ש- \overrightarrow{PC} חותכת את הקטע $A'B'$, ונשתמש ב- (ב).

4.4.17 סיכום:

אכסיומת המקבילים ההיפרבולית שקולה לכל אחת מן טענות הבאות:

(א) לכל ישר ℓ וכל נקודה $P \notin \ell$, יש לפחות שני מקבילים ל- ℓ דרך P .

(ב) קיים משולש שבו סכום הזוויות קטן מ- 180° .

(ג) סכום הזוויות בכל משולש קטן מ- 180° .

(ד) כל שני משולשים דומים - חופפים.

(ה) קיימים משולשים $\triangle ABC$ שבהם האנכים האמצעיים אינם נחתכים.

(ו) אין שני ישרים מקבילים $k \parallel \ell$ ונקודות $A * B * C$ על k , $D * E * F$ על ℓ , כך ש- $AD \cong BE \cong FC$ והישרים $\ell(A, D)$, $\ell(B, E)$, ו- $\ell(C, F)$ מאונכים לישר ℓ .

הערה: כאמור, באופן היסטורי פותחה הגיאומטריה ההיפרבולית מלכתחילה באופן אכסיו-מאטי, והמודלים האנליטיים השונים שהוצעו לה נועדו להראות שהיא עקבית. מאחר וכבר פיתחנו מודל אחד כזה בפרק 3, נותר לנו רק לוודא:

4.4.18 משפט:

במודל פואנקארה של חצי-המישור III מתקיימות כל האכסיומות של הגיאומטריה ההיפר-בולית.

הוכחה: כאמור, קבוצות האכסיומות I, II, IV, ו-V מתקיימות באופן מיידי מתוך תכונות המישור האוקלידי \mathbb{R}^2 , ואילו אכסיומות החפיפה III מתקיימות גם הן על-פי תכונות מעגלים וישרים במישור האוקלידי ובעזרת היחידות בטענה 3.2.3.

4.5 תרגילים לפרק 4

התרגילים הבאים מתייחסים לגיאומטריה האבסולוטית, ולכן בפתרונם מותר להשתמש רק באכסיומות מקבוצות I, II, III, ו-IV.

- 4.5.1 הוכח/י את טענה 4.3.1.
- 4.5.2 הוכח/י את טענה 4.3.2.
- 4.5.3 הוכח/י את טענה 4.3.3.
- 4.5.4 הוכח/י את טענה 4.3.4.
- 4.5.5 הוכח/י את טענה 4.3.5.
- 4.5.6 הוכח/י את למה 4.3.6.
- 4.5.7 הוכח/י את למה 4.3.7.
- 4.5.8 הוכח/י את למה 4.3.8.
- 4.5.9 הוכח/י את משפט 4.3.9.
- 4.5.10 הוכח/י את טענה 4.3.10.
- 4.5.11 הוכח/י את טענה 4.3.11.
- 4.5.12 הוכח/י את טענה 4.3.12.
- 4.5.13 הוכח/י את למה 4.3.13.
- 4.5.14 הוכח/י את טענה 4.3.14.
- 4.5.15 הוכח/י את טענה 4.3.24.
- 4.5.16 הוכח/י את למה 4.3.31.
- 4.5.17 הוכח/י את טענה 4.3.37.
- 4.5.18 הוכח/י את טענה 4.3.39.

התרגילים הבאים מתייחסים לגיאומטריה היפרבולית, ולכן בפתרונם מותר להשתמש באכסיומות מקבוצות I, II, III, IV, ו-V.

.4.4.3 הוכח/י את טענה	4.5.19
.4.4.4 הוכח/י את טענה	4.5.20
.4.4.7 הוכח/י בפירוט את טענה	4.5.21
.4.4.8 הוכח/י את טענה	4.5.22
.4.4.9 הוכח/י את טענה	4.5.23
.4.4.10 הוכח/י את טענה	4.5.24
.4.4.11 הוכח/י את טענה	4.5.25
.4.4.12 הוכח/י את טענה	4.5.26
.4.4.18 הוכח/י בפירוט את משפט	4.5.27